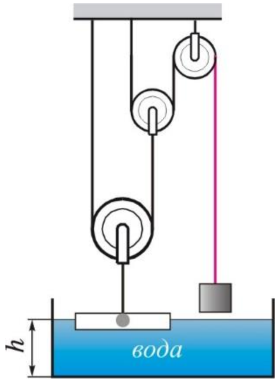
9 клас, III тур

Задача 1. У тонку крижану пластинку масою 270 г вморожена алюмінієва кулька масою 81 г. Ця пластинка через систему блоків урівноважує тягарець масою 10 г (див. рисунок). Блоки та нитки невагомі, тертя відсутнє, температура всієї показаної на рисунку системи 0 °C. Площа поверхні води набагато більша за площу пластинки, глибина води $h = 40$ см, довжина червоної ділянки нитки більша за 1,6 м. У воді вмикають електронагрівник потужністю 330 Вт, що спричиняє повільний рух тягарця. Визначте приблизно середню швидкість переміщення тягарця між моментами початку та закінчення його руху. Опір під час руху в воді не враховуйте. Густини води, льоду та алюмінію дорівнюють відповідно 1000, 900 і 2700 кг/м^3; питома теплота плавлення льоду становить 330 кДж/кг.



Розв'язання.

Тягарець не може витягти пластинку загальною масою 351 г з води (навіть з урахуванням виграшу в силі в 4 рази, що дає система блоків), але зменшує її «осадку» в воді. Після вмикання нагрівача лід потроху тане (протягом цього процесу жодних втрат енергії немає, тому що температура всіх частин системи однакова). Тому осадка пластинки збільшується, вона опускається, а тягарець рухається вгору. Легко переконатися, що пластинка повністю зануриться за умови

$$4m_{\text{тяг}} + \rho_{\text{в}} \left(\frac{m_{\text{л}}}{\rho_{\text{л}}} + \frac{m_{\text{ал}}}{\rho_{\text{ал}}} \right) = m_{\text{л}} + m_{\text{ал}},$$

тобто коли маса льоду зменшиться до $m_{\text{л}} = 99$ г (коли маса льоду зменшиться на $\Delta m = 171$ г). На це піде час $t = \frac{\lambda \Delta m}{P} = 171$ с. Практично відразу після цього пластинка опуститься на дно, піднявши тягарець на висоту $4h$ (довжина червоної ділянки нитки це дозволяє). Після цього рух частин системи припиниться, після повного танення льоду кулька лежатиме на дні. Отже, шукана середня швидкість дорівнює $\frac{4h}{t}$, тобто приблизно 0,94 см/с. Насправді середня швидкість трохи менша, оскільки опускання на дно теж триває певний час.

Коментар. Проте легко показати, що час руху в воді не перевищує кількох секунд. Якщо припустити $a = kt$, то $h = kt^3/6$. У нас коефіцієнт дорівнює десь 1/162 м/с^3 (це початкове значення, далі він ще зростає). Звідси час (точніше, верхня границя часу) 7,3 с. Це не дуже суттєво, середня швидкість зменшиться не більше ніж на 0,04 см/с. Журі не очікує такої оцінки від учасників.

Максимальний бал за задачу становить 9.

Критерії оцінювання задачі 1

Умова рівноваги системи блоків	2,0 б.
Визначення маси льоду, за якої пластинка тоне	2,0 б.
Визначення часу роботи нагрівника	2,0 б.
Визначення переміщення тягарця	1,0 б.
Отримання кінцевого значення середньої швидкості	2,0 б.

Задача 2. Головна оптична вісь лінзи з оптичною силою 2 дптр горизонтальна. Траєкторія руху світної кульки, що вільно падає, проходить через точку головної оптичної осі на відстані 2 м від лінзи. Одночасно з цим гладенькою похилою площиною П з'їжджає маленька плоска пластина. Протягом певного часу лінза та розташоване за нею плоске дзеркало (див. рисунок) утворюють на поверхні пластини, як на екрані, зображення кульки. Визначте кути нахилу площини дзеркала та похилої площини до горизонту. ***Підказ.*** Тіло зісковзує з гладенької похилої площини з прискоренням $g\sin\alpha$, де α — кут нахилу площини до горизонту.

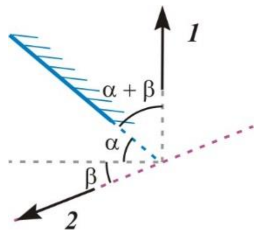
Розв'язання.

Позначимо шукані кути: кут нахилу площини дзеркала до горизонту α, а кут нахилу похилої площини β. Очевидно, рухи кульки та пластини почалися одночасно, тому модулі їх переміщень за певний час відповідно $h = \frac{gt^2}{2}$ і $H = \frac{at^2}{2}$. Це означає, що наша оптична система дає дійсне зображення вертикального відрізку — відрізок під кутом β до горизонту, з лінійним збільшенням $\Gamma = \frac{H}{h} = \frac{a}{g} = \sin\beta$.

Це зображення утворюється «у два кроки». Спочатку лінза дає дійсне перевернуте зображення ***1*** на відстані 2/3 м праворуч від себе (це легко отримати з формули тонкої лінзи). Це зображення зменшене втричі: $\Gamma = \frac{f}{d} = \frac{1}{3}$. Далі вже це зображення є «предметом» для дзеркала, яке й дає остаточне зображення ***2***. Оскільки розмір зображення в плоскому дзеркалі збігається з розміром предмета, маємо $\sin\beta = \frac{1}{3}$, звідки $\beta = 19{,}47°$.

Зазначимо: щоб плоске дзеркало давало *дійсне* зображення, на нього має падати *збіжний* пучок світла (інакше кажучи, «предмет» має бути *уявним*). У даному випадку це просто означає, що дзеркало розташоване між лінзою та зображенням ***1***.

Тепер ми можемо відповісти на поставлене запитання. Скористаємося тим, що зображення ***1*** і ***2*** розташовані симетрично відносно площини дзеркала (див. рисунок). З рисунку бачимо, що $2\alpha + \beta = 90°$, тобто шуканий кут нахилу площини дзеркала $\alpha = 45° - \beta/2 = 35{,}26°$.



Максимальний бал за задачу становить 9.

Критерії оцінювання задачі 2

Визначення траєкторії зображення, що дає лінза	2,0 б.
Визначення збільшення лінзи	2,0 б.
Отримання зв'язку між шуканими кутами	2,0 б.
Отримання зв'язку між прискореннями	1,0 б.
Отримання кінцевих значень кутів	2,0 б.

Задача 3. Щоб доставити групу туристів з готелю до музею, треба подолати відстань 18 км. Для цього можна скористатися автобусом, швидкість руху якого по місцевих дорогах дорівнює 45 км/год. Проте автобус вміщує тільки половину групи, до того ж має обмежений запас ходу через обмежену кількість пального. Туристи можуть пересуватися пішки зі швидкістю 5 км/год. Визначте мінімальний час t доставки всієї групи, якщо запас ходу s автобусу становить: а) 12 км; б) 30 км; в) 45 км. Накресліть графік залежності $t(s)$. Час посадки та висадки пасажирів не враховуйте.

Розв'язання.

Позначимо відстань від готелю до музею L, швидкості автобуса та туристів-пішоходів відповідно $v_а$ і $v_п$. *Мінімальний* час відповідає випадку, коли обидві половини групи витрачають на переміщення *однаковий* час. Адже якщо якась половина групи дістанеться музею раніше, то це за рахунок «надмірного» використання автобуса. Тим самим збільшується час руху іншої половини групи (отже, й загальний час руху).

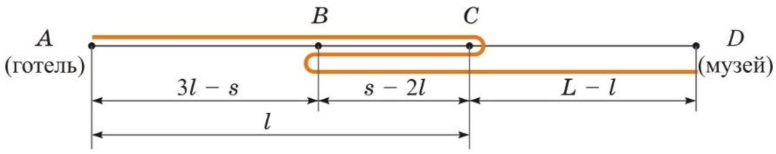
Таким чином, кожна половина групи має проїхати автобусом однакову відстань l і пройти пішки $L-l$. Зрозуміло, що час руху $t=\frac{l}{v_а}+\frac{L-l}{v_п}$ тим менший, чим більша відстань l. Слід розглянути різні можливі випадки.

1. Якщо запас ходу s не перевищує L, то $l=s/2$: автобус підвозить першу половину групи (далі ці туристи йдуть пішки), зупиняється та чекає на решту туристів, після чого підвозить їх на таку саму відстань. Очевидно, що немає сенсу їхати назустріч туристам, бо це зменшить можливе значення l і збільшить час руху. У цьому випадку

$$t_1=\frac{s}{2v_а}+\frac{2L-s}{2v_п}$$

(перевірте самі, що виходить у випадках $s\to 0$ і $s\to L$).

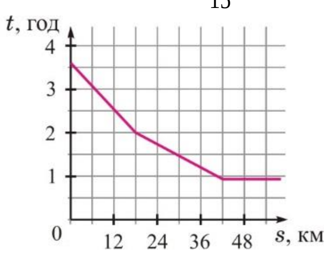
2. Якщо $s>L$, то з'являється можливість ще зменшити час: автобус підвозить половину групи на відстань $l>L/2$, потім рухається назад до зустрічі з рештою туристів і везе їх уже до музею (теж на відстань l). Очевидно, що автобус проїжджає *назад* відстань $s-2l$. Тому решта туристів має пройти до зустрічі з автобусом відстань $AB=3l-s$ (див. рисунок, на якому умовно показано рух автобуса). Ця відстань має збігатися з довжиною пішого переходу $CD=L-l$, звідки отримуємо $l=(L+s)/4$.



Отже, у цьому випадку загальний час руху $t_2=\frac{L+s}{4v_а}+\frac{3L-s}{4v_п}$ (за умови $s\to L$ отримуємо, як і в попередньому випадку, час $\frac{L}{2v_а}+\frac{L}{2v_п}$).

Час руху автобуса $t_а=\frac{s}{v_а}$. За умови $s<L\frac{v_п+3v_а}{v_а+3v_п}$ цей час менший від загального часу руху t_2, тобто автобус має певний час стояти (наприклад, у точці B), чекаючи на пасажирів. За умови ж $s>s_0=L\frac{v_п+3v_а}{v_а+3v_п}$ формально отримуємо час руху автобуса, більший за t_2, що неможливо. Фактично нема сенсу збільшувати пробіг автобуса понад s_0, тобто «надлишкове пальне» просто не треба витрачати. Якщо $s\geq s_0$, мінімальний час руху вже не залежить від s і дорівнює $t_0=\frac{s_0}{v_а}=\frac{L\left(v_п+3v_а\right)}{v_а\left(v_а+3v_п\right)}$.

За наведених в умові даних графік $t(s)$ див. на рисунку ($t_0=\frac{14}{15}$ год $\approx$ 0,93 год).



Мінімальний час руху: а) 2,53 год (2 год 32 хв); б) 1,47 год (1 год 28 хв); в) 0,93 год (56 хв).

Максимальний бал за задачу становить 9.

Критерії оцінювання задачі 3

Формулювання умови щодо однакового часу руху половин групи	2,0 б.
Аналіз першого випадку (малий запас ходу)	2,0 б.
Аналіз інших випадків	2,0 б.
Побудова графіку залежності часу від запасу ходу	3,0 б.

Задача 4. Однакові циліндри виготовлено зі сплаву з великим питомим опором. На боковій поверхні кожного циліндра зроблено чотири симетричні плоскі «зрізи», паралельні осі циліндра; їх поверхню посріблено для кращого електричного контакту (див. рис. 1). Електричний опір циліндра між контактами A і C виявився рівним r (див. рис. 2). Опір між контактами A і B виявився таким самим (під час останнього вимірювання контакти C і D були з'єднані провідниками з нехтовно малим опором, на рис. 3, 4 такі провідники показані як зелені лінії).

З дев'яти циліндрів склали систему, показану на рис. 4, щільно притиснувши сусідні плоскі поверхні одну до одної, та приєднали цю систему до ідеального джерела струму з напругою U.

1) Визначте силу струму через джерело струму.

2) Яку напругу покаже ідеальний вольтметр, приєднаний до контактів A і B?

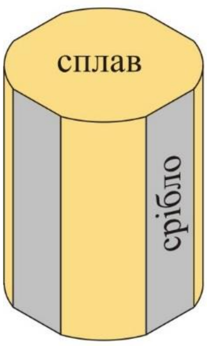


Рис. 1

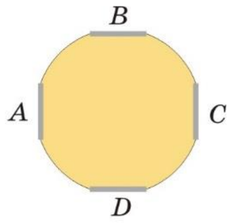


Рис. 2

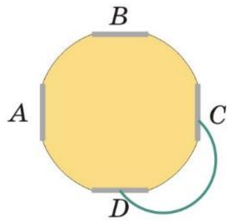


Рис. 3

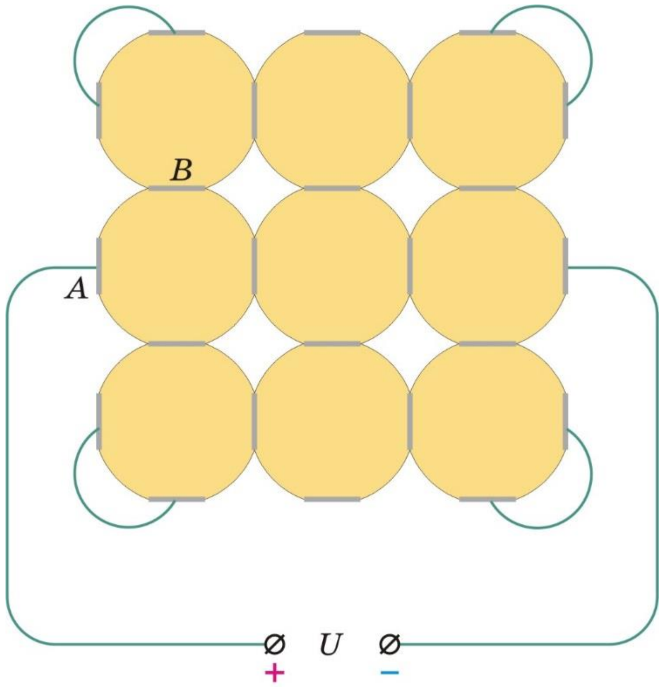


Рис. 4

Розв'язання.

Закон Ома, який виконується для металів і сплавів, означає що середня швидкість упорядкованого руху вільних електронів пропорційна «силі» електричного поля. Якщо ми маємо справу з так званим двополюсником (наприклад, з одним резистором або з'єднанням резисторів з двома зовнішніми контактами), то сила струму I пропорційна напрузі U між зовнішніми контактами. Наші циліндри мають по чотири контакти. Отже, сила струму через певний контакт має лінійно залежати від *трьох* напруг (між даним контактом і кожним із решти контактів). Наприклад, $I_A = k_{AB}U_{AB} + k_{AC}U_{AC} + k_{AD}U_{AD}$. Тут з'явилися три сталі коефіцієнти перед напругами замість одного (цей один, обернений до опору, називають провідністю). Якщо знати всі коефіцієнти, то можна розрахувати силу струму через будь-який контакт. Із симетрії циліндра випливає, що два з трьох коефіцієнтів однакові: $k_{AB} = k_{AD}$. Для зручності позначимо $k_{AB} = k_1, k_{AC} = k_2$. Очевидно, що $k_{CD} = k_1, k_{BD} = k_2$ тощо.

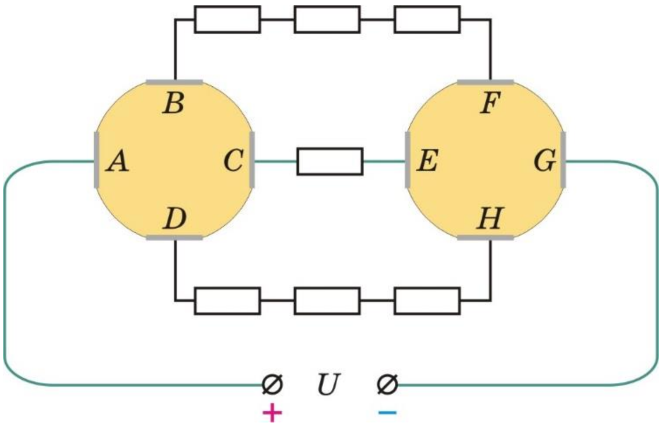
Спробуємо виразити коефіцієнти k_1, k_2 через відомий опір r. Для цього знов-таки скористаємося симетрією наших чотириполюсників. Якщо прикласти напругу U до контактів A і C (див. рис. 2), $U_{AB} = U_{AD} = \frac{U}{2}$. Отже,

$$I_A = 2k_1\frac{U}{2} + k_2U = \frac{U}{r}, \text{ тобто } k_1 + k_2 = r^{-1}.$$

Якщо ж прикласти напругу U до контактів A і B (див. рис. 3), $U_{AC} = U_{AD} = \frac{U}{2}$. Отже,

$$I_A = k_1U + k_1\frac{U}{2} + k_2\frac{U}{2} = \frac{U}{r}, \text{ тобто } \frac{3}{2}k_1 + \frac{1}{2}k_2 = r^{-1}.$$

З останніх двох рівнянь маємо $k_1 = k_2 = (2r)^{-1}$. Тепер ми можемо розглянути й систему з 9 циліндрів. Перш за все помітимо, що можна трохи відсунути «верхній» і нижній» (на рисунку) циліндри від центрального, тобто перервати контакти між ними. Після цього напруга (різниця потенціалів) між «розірваними» контактами лишається рівною нулю, тобто струм через ці пари контактів не потече навіть якщо їх знов з'єднати. Отже, три з дев'яти циліндрів «працюють» в режимі, показаному на рис. 2, тобто як резистори з опором r. Чотири ж «кутові» циліндри «працюють» в режимі рис. 3 — тобто теж як резистори з опором r. Тепер ми можемо навести значно спрощену еквівалентну схему кола (див. рисунок, де всі резистори мають опір r).



Нам залишилося розібратися з двома симетрично розташованими циліндрами. Зазначимо, що загальна сила струму в колі $I = I_A = I_G$, а сила струму в центральному резисторі дорівнює $I_C = I_E$. Відповідно до закону збереження електричного заряду (або першому правилу Кірхгофа, якщо хтось із вас це знає) та симетрії кола можна записати співвідношення: $I_A = I_B + I_C + I_D$, $I_B = I_D$ та аналогічні співвідношення для контактів $E - H$.

Позначимо для зручності $U_{AB} = U_{AD} = x$. Очевидно, що U_{FG} і U_{HG} теж дорівнюють x. Аналогічно позначимо $U_{AC} = U_{EG} = y$. Тоді можна скласти рівняння:

$$I_C = \frac{U-2y}{r} = (2r)^{-1}(y + 2(y-x)), \qquad I_B = \frac{U-2x}{3r} = (2r)^{-1}(x + (x-y)).$$

Звідси легко отримати $x = \frac{5}{16}U, y = \frac{3}{8}U$. Тоді $I_C = \frac{U}{4r}, I_B = \frac{U}{8r}$. Повна ж сила струму (сила струму через джерело) $I = 2I_B + I_C = \frac{U}{2r}$. Інакше кажучи, загальний опір системи $R = \frac{U}{I} = 2r$.

Що ж до напруги $U_{AB} = x$, то ми вже знайшли цю величину: вона дорівнює $\frac{5}{16}U$.

Максимальний бал за задачу становить 9.

Критерії оцінювання задачі 4

Запис залежності струму від напруг (потенціалів)	1,0 б.
Визначення коефіцієнтів (або ефективних опорів) для циліндрів	2,0 б.
Застосування симетрії кола	2,0 б.
Правильна еквівалентна схема	2,0 б.
Отримання кінцевих відповідей	2,0 б.