

ЗАДАЧІ ФІЗИЧНОГО МАРАФОНУ

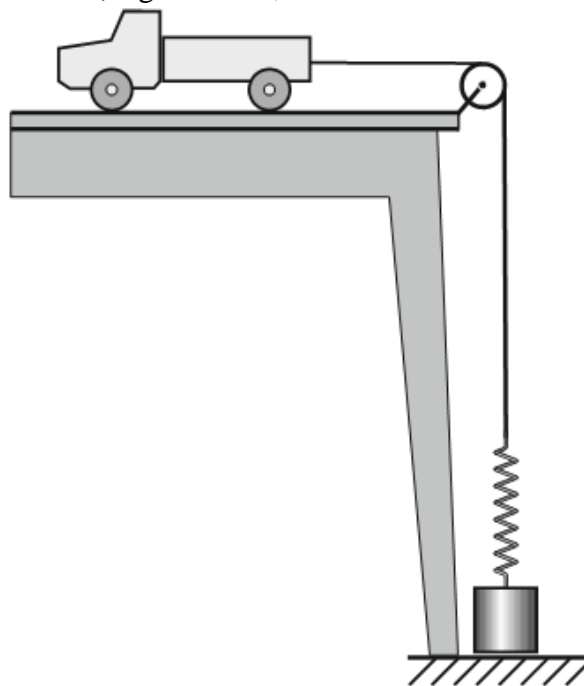
8 КЛАС

III тур

Задача № 1

Суцільний алюмінієвий кубик, що лежить на підлозі під столом, прикріпили до невагомої пружини. Ця пружина (жорсткістю $k=4 \text{ Н/м}$) в свою чергу прив'язана легкою ниткою перекинута через нерухомий блок до іграшкової вантажівки на гумових колесах масою $M=200 \text{ г}$. Вважаючи, що густина алюмінію 2700 кг/м^3 , а $g=10 \text{ Н/кг}$, знайдіть:

- 1) масу кубика m , якщо відомо, що він створює на підлогу тиск $0,9 \text{ кПа}$. Пружина в початковий момент недеформована.
- 2) Машинку заводять і всі її колеса починають обертатись з постійною та однаковою швидкістю. Коефіцієнт тертя коліс по поверхні стола $0,4$. Заведену машинку розмішують на поверхні стола так, що система перебуває в рівновазі. Знайдіть видовження пружини у цьому випадку.
- 3) З якою силою в цей момент буде діяти кубик на підлогу?
- 4) В певний момент у вантажівку юний дослідник почав щосекунди класти монетки масою $m_0=5 \text{ г}$ кожна. Через який час після того, як поклали першу монету кубик відірветься від підлоги?



Розв'язання:

1) За визначенням тиску: $p = \frac{F}{S} = \frac{mg}{a^2} = \frac{\rho a^3 g}{a^2} = \rho a g$ тоді сторона куба: $a = \frac{p}{\rho g} = \frac{1}{30} \text{ м}$, а його маса відповідно: $m = \rho V = \rho a^3 = 0,1 \text{ кг}$.

Відповідь: $m=0,1 \text{ кг}$

2) Після запуску двигуна машинки її колеса почнуть обертатися. В точці дотику коліс з поверхнею виникають сили тертя спокою. Одні прикладені до поверхні та направлені проти напрямку руху машинки, інші прикладені до коліс та направлені в сторону руху. Це і є сили тяги, що приводять в рух машинку. В міру просування вперед пружина деформується, натяг нитки зростає, і в певний момент машинка зупиняється, а колеса починають проковзувати. Сила тертя ковзання може бути обчислена за законом Амонтон-Кулона:

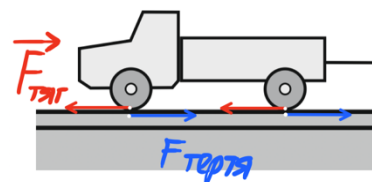
$$F_{\text{ТЕР}} = \mu N_1 = \mu Mg = 0,8 \text{ Н}$$

Видовження пружини спричинене силою тяги:

$$F_{\text{ТЯГИ}} = T = k \cdot x$$

$$k \cdot x = \mu Mg$$

$$x = \frac{\mu Mg}{k} = 0,2 \text{ м}$$



Відповідь: $x=0,2$ м

3) Сила, з якою кубик діє на опору - це його вага, яка за модулем дорівнює силі реакції пори $P=N_1$.

з умови рівноваги: $mg = N_1 + F_{\text{пр1}}$, звідки $P = mg - k \cdot x = 0,2$ Н

Відповідь: $P=0,2$ Н

4) Умовою відриву кубика від опори є те, що він перестає на цю опору діяти

$$N_2 = 0$$

$$F_{\text{пр2}} = mg = F_{\text{тягн2}}$$

$$\mu(M + n \cdot m_0)g = mg$$

Де n – це необхідна кількість монет:

$$n = \frac{m - \mu M}{\mu m_0} = 10$$

Отже для відриву кубика потрібно покласти 10 монет. Оскільки їх кладуть щосекунди то на це буде потрібно 9 секунд.

Відповідь: $t = 9$ с

Критерії оцінювання

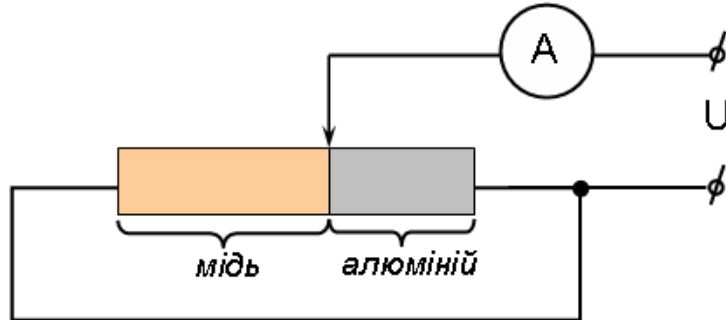
<i>Правильно виконане завдання</i>	<i>Кількість балів</i>
1.Правильні пояснення, кінцева формула, коректні обчислення, розмірності до пункту 1.1	2
2.Правильні пояснення, рисунок, кінцева формула, коректні обчислення, розмірності до пункту 1.2	2
3.Правильні пояснення, рисунок, кінцева формула, коректні обчислення, розмірності до пункту 1.3	2
4.Правильні пояснення, рисунок, кінцева формула, коректні обчислення, розмірності до пункту 1.4	3

Задача № 2

Реостат являє собою керамічний циліндр діаметром 6 см, на який намотано мідний та алюмінієвий дроти однакового діаметру 0,75 мм, одні кінці яких спаяні між собою. На циліндрі виявилось 220 витків мідного дроту та 200 витків алюмінієвого. Вільні кінці дротів та повзунок підключені до джерела постійної напруги 12 В, так як показано на рисунку. Витки дроту щільно прилягають один до одного та ізольовані один від одного. Нехтуючи опором амперметра і з'єднувальних провідників знайдіть:

- 1) покази амперметра для випадку коли повзунок знаходиться у місці з'єднання алюмінієвого та мідного дротів;
- 2) покази амперметра, коли повзунок знаходиться посередині мідної намотки;
- 3) мінімальні покази амперметра;

Питомий опір міді $1,7 \cdot 10^{-8} \text{ Ом} \cdot \text{ м}$, питомий опір алюмінію $2,9 \cdot 10^{-8} \text{ Ом} \cdot \text{ м}$.



Розв'язання:

Введемо позначення: діаметр керамічного циліндра $D=0,06 \text{ м}$; діаметр дроту $d=0,75 \cdot 10^{-3} \text{ м}$; кількість витків мідного дроту $N_M=220$; кількість витків алюмінієвого дроту $N_A=200$; напруга на клеммах джерела $U=12 \text{ В}$, питомий опір мідного дроту $\rho_M = 1,7 \cdot 10^{-8} \text{ Ом} \cdot \text{ м}$; питомий опір алюмінієвого дроту $\rho_A = 2,9 \cdot 10^{-8} \text{ Ом} \cdot \text{ м}$.

Виконаємо деякі підготовчі дії, щоб спростити подальші математичні перетворення.

Знайдемо довжину намотки з мідного дроту: $L_M = N_M \cdot \pi \cdot D \approx 41,4 \text{ м}$;

Знайдемо довжину намотки з алюмінієвого дроту: $L_A = N_A \cdot \pi \cdot D \approx 37,7 \text{ м}$

Знайдемо опір одиниці довжини мідного дроту: $r_M = \frac{R_M}{L_M} = \frac{\rho_M}{S} = \frac{4\rho_M}{\pi d^2} \approx 0,038 \frac{\text{Ом}}{\text{м}}$

Знайдемо опір одиниці довжини алюмінієвого дроту: $r_A = \frac{R_A}{L_A} = \frac{\rho_A}{S} = \frac{4\rho_A}{\pi d^2} \approx 0,066 \frac{\text{Ом}}{\text{м}}$

1) Знайдемо покази амперметра для випадку коли повзунок знаходиться у місці з'єднання алюмінієвого та мідного дротів.

В цьому випадку дану схему можна замінити еквівалентною (див. рис.):

Загальний опір з'єднання:

$$R = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}, \text{ де } R_1 = r_M L_M, R_2 = r_A L_A$$

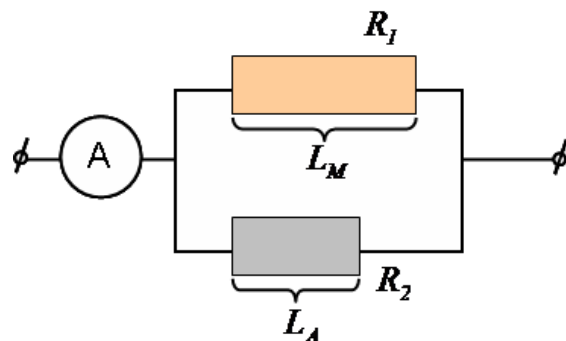
Підставивши значення r_M та r_A , отримаємо:

$$R = \frac{L_M r_M \cdot L_A r_A}{L_A r_A + L_M r_M} \approx 0,96 \text{ Ом}$$

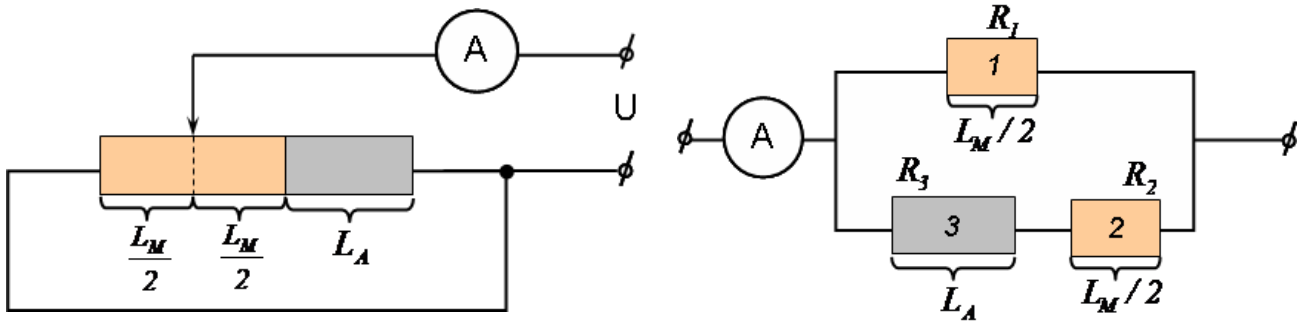
Покази амперметра:

$$I = \frac{U}{R} \approx 12,4 \text{ А}$$

Відповідь: $I \approx 12,4 \text{ А}$



2) Знайдемо покази амперметра, коли повзунок знаходиться посередині мідної намотки. В цьому випадку дану схему можна замінити еквівалентною (див. рис.):



Загальний опір з'єднання:

$$R = \frac{R_1 \cdot (R_2 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3}, \text{ де } R_1 = R_2 = \frac{r_M L_M}{2}, R_3 = r_A L_A$$

Підставивши значення r_M та r_A та спростивши, отримуємо:

$$R = \frac{L_M r_M \cdot (2L_A r_A + L_M r_M)}{4(L_A r_A + L_M r_M)} \approx 0,63 \text{ Ом}$$

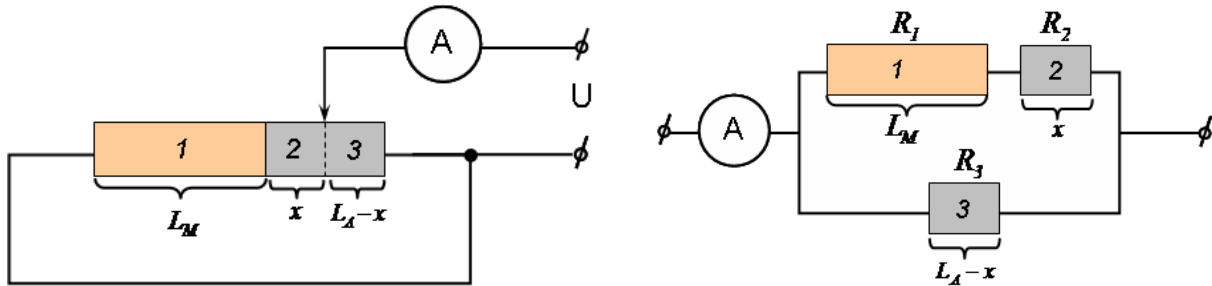
Покази амперметра: $I = \frac{U}{R} \approx 19 \text{ A}$

Відповідь: $I \approx 19 \text{ A}$

3) Знайдемо мінімальну силу струму.

Сила струму буде мінімальною, якщо опір ділянки кола буде максимальним. Знайдемо положення повзунка, при якому опір даної ділянки кола найбільший. Нехай при максимальному опорі ділянки кола повзунок реостата змістили на відстань x від точки з'єднання провідників в бік алюмінієвої намотки.

В цьому випадку дану схему можна замінити еквівалентною (див. рис.):



Загальний опір з'єднання:

$$R = \frac{R_3 \cdot (R_1 + R_2)}{R_1 + R_2 + R_3}, \text{ де } R_1 = r_M L_M, R_2 = r_A \cdot x, R_3 = r_A \cdot (L - x)$$

Підставивши R_1, R_2, R_3 отримуємо:

$$R_{MAX} = \frac{(L_A - x)r_A \cdot (L_M r_M + r_A x)}{L_A r_A + L_M r_M}$$

Перепишемо даний вираз в такому вигляді:

$$x^2 \cdot [r_A]^2 - x \cdot [r_A \cdot (L_A r_A - L_M r_M)] + [R_{MAX} (L_A r_A + L_M r_M) - L_M r_M L_A r_A] = 0$$

Ми отримали квадратне рівняння відносно x . Оскільки значення опору ділянки максимальне R_{MAX} , то дане квадратне рівняння повинно мати два однакові корені, тобто дискримінант цього рівняння має дорівнювати нулю:

$$D = (L_A r_A - L_M r_M)^2 r_A^2 - 4r_A^2 [R_{MAX} (L_A r_A + L_M r_M) - L_A r_A \cdot L_M r_M] = 0$$

Звідки

$$R_{MAX} = \frac{L_A r_A + L_M r_M}{4} \approx 1,02 \text{ Ом}$$

Таке значення опору буде при:

$$x = \frac{L_A r_A - L_M r_M}{2r_A} = 6,9 \text{ м} - \text{довжина алюмінієвого дроту від місця намотки.}$$

При цьому опори частин $R_1 + R_2 = r_M L_M + r_A x = 2,03 \text{ Ом}$ та $R_3 = r_A (L_A - x) = 2,03 \text{ Ом}$

Покази амперметра: $I = \frac{U}{R} \approx 11,8 \text{ А}$

Відповідь: $I \approx 11,8 \text{ А}$

Критерії оцінювання

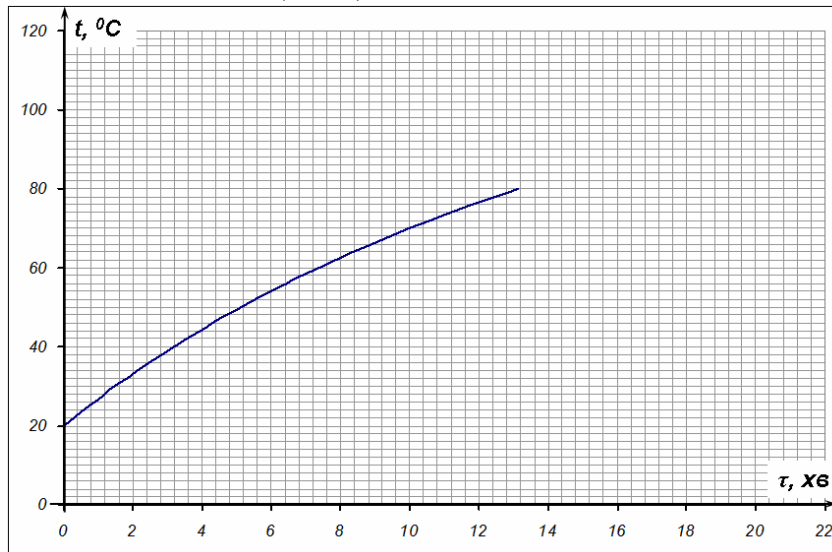
Правильно виконане завдання	Кількість балів
1. Правильно зображена еквівалентна схема до пункту 1)	1
2. Правильно знайдена сила струму у пункті 1)	1
3. Правильно зображена еквівалентна схема до пункту 2)	1
4. Правильно знайдена сила струму у пункті 2)	1
5. Правильно зображена еквівалентна схема до пункту 3)	1
6. Доведено, що максимальний опір ділянки буде при рівних опорах паралельно з'єднаних її частин або правильно доведена формула максимального опору ділянки	2
7. Правильно знайдена мінімальна сила струму	2

Задача № 3

Виконуючи лабораторну роботу, учень поставив на електроплитку плитку постійної потужності посудину з водою, початкова температура якої дорівнює температурі оточуючого середовища 20 °С. Маса води 1 кг. Після ввімкнення нагрівника учень вимірював температуру води через рівні проміжки часу, нагріваючи воду до температури кипіння 100 °С. Графік залежності температури води t від часу τ показаний на рисунку. Вважайте, що потужність теплообміну з оточуючим середовищем пропорційна різниці температур води та середовища. Нехтуючи випаровуванням води та теплоємністю калориметра, дайте відповіді на такі запитання:

- 1) якою є потужність електроплитки?
- 2) яка потужність теплообміну з оточуючим середовищем при температурі 100 °С?
- 3) через який час від моменту закипання усі вода википить?

Питома теплоємність води 4,2 кДж/(кг °С); питома теплота кипіння 2,3 МДж/кг.



Розв'язання:

Введемо позначення: c - питома теплоємність води; L - питома теплота кипіння води; m - маса води; P - потужність нагрівника; P_{TO} - потужність теплообміну з оточуючим середовищем.

1) Щоб знайти **потужність електроплитки** розглянемо точку А на графіку, координати якої (0 хв; 20 °С). Проведемо дотичну до графіка функції у цій точці (див рис.). Тепло, яке виділяє нагрівник іде частково на нагрівання води, а частково на теплообмін із середовищем:

$$P \cdot \tau = c m \Delta t + P_{TO} \cdot \tau$$

Тангенс кута нахилу дотичної дорівнює відношенню: $\frac{\Delta t}{\Delta \tau} = \frac{P - P_{TO}}{c m}$.

Для невеликої різниці температур між водою і середовищем потужністю P_{TO}

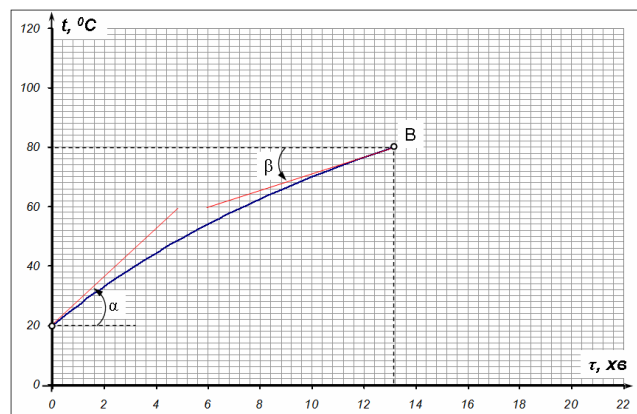
можна знехтувати, тому: $\frac{\Delta t}{\Delta \tau} = \frac{P}{c m}$ звідки

знаходимо потужність нагрівника:

$$P = c m \cdot \frac{\Delta t}{\Delta \tau}.$$

Зручно взяти $\Delta t = 6$ °С, $\Delta \tau = 0,8$ хв.

В цьому випадку залежність температури від часу дуже близька до лінійної, тоді.



$$P = c m \cdot \frac{\Delta t}{\Delta \tau} = 525 \text{ Вт} \approx 530 \text{ Вт}$$

Відповідь: $P=530 \text{ Вт}$

2) Щоб знайти **потужність теплообміну з оточуючим середовищем при температурі 100°C** виконаємо наступні кроки:

Знайдемо потужність теплообміну при 80°C . Для цього проведемо дотичну до графіка у точці В з координатами (13,2 хв; 80°C). Тангенс кута нахилу дотичної дорівнює

відношенню: $\frac{\Delta t}{\Delta \tau} = \frac{P - P_{\text{ТО}}}{c m}$, звідки $P_{\text{ТО}}(80^\circ\text{C}) = P - c m \frac{\Delta t}{\Delta \tau}$. Зручно взяти $\Delta t = 6^\circ\text{C}$, $\Delta \tau = 2 \text{ хв}$,

тоді $P_{\text{ТО}}(80^\circ\text{C}) \approx 320 \text{ Вт}$. Оскільки потужність теплообміну прямо пропорційна різниці температур води та оточуючого середовища, отже, $P_{\text{ТО}} = k(t_{\text{ВОДИ}} - t_{\text{СЕРД}})$, звідки можемо скласти пропорцію

$$\frac{P_{\text{ТО}}(80^\circ\text{C})}{80^\circ\text{C} - 20^\circ\text{C}} = \frac{P_{\text{ТО}}(100^\circ\text{C})}{100^\circ\text{C} - 20^\circ\text{C}} \text{ звідси } P_{\text{ТО}}(100^\circ\text{C}) = \frac{4}{3} P_{\text{ТО}}(80^\circ\text{C}) \approx 427 \text{ Вт}$$

Відповідь: $P_{\text{ТО}}(100^\circ\text{C}) = 427 \text{ Вт}$

3) **Знайдемо час, який знадобиться для википання усієї води з посудини.**

Під час кипіння температура води змінюватись не буде, тому потужність теплообміну з оточуючим середовищем залишатиметься сталою і дорівнюватиме 427 Вт . Тоді для процесу википання води можна записати: $P \cdot \tau_K = Lm + P_{\text{ТО}}(100^\circ\text{C}) \cdot \tau_K$, де τ_K - час википання води.

$$\text{Звідки } \tau_K = \frac{Lm}{P - P_{\text{ТО}}(100^\circ\text{C})} \approx 22300 \text{ с} \approx 372 \text{ хв} \approx 6,2 \text{ год.}$$

Відповідь: $\tau_K = 6,2 \text{ год}$

Критерії оцінювання

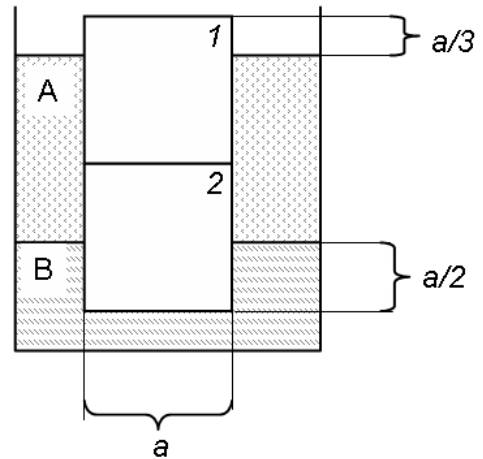
Правильно виконане завдання	Кількість балів
1. Правильний запис закону збереження енергії для процесу нагрівання води	1
2. Правильно пояснена ідея пошуку потужності нагрівника	1
3. Правильно знайдена потужність нагрівник -	1
4. Правильно пояснена ідея пошуку потужності теплообмінну з середовищем при 100°C	2
5. Правильно знайдена потужність теплообміну з середовищем при при 100°C -	2
6. Правильний запис закону збереження енергії для процесу кипіння води	1
7. Правильно знайдений час википання води	1

Задача № 4

Два скріплені між собою кубики 1 та 2 з однаковими ребрами довжиною a та густинами ρ_1 і ρ_2 відповідно плавають у двох рідинах А та В так, що верхній кубик густиною ρ_1 виринає на $a/3$ над рівнем рідини А, а межа поділу рідин проходить через середину нижнього кубика густиною ρ_2 . Густина рідини В на 20% більша за густину рідини А. Визначте:

- 1) Які густини рідин?
- 2) З якими силами діють кубики один на одного.
- 3) Якими будуть напрямки цих сил?

Для пунктів 2) та 3) розгляньте два випадки: а) рідина потрапляє у простір між кубиками; б) рідина не проникає у простір між кубиками.



Розв'язання:

1) Знайдемо густини рідин А та В, врахувавши, що $\rho_B = 1,2 \rho_A$. Розглянемо систему кубиків як одне ціле. На кубики діють сили тяжіння m_1g та m_2g та на нижню грань кубика 2 діє сила тиску стовпчика рідини F (див рис). Силу атмосферного тиску ми не врахували, оскільки сила атмосферного тиску на верхню грань системи і складова сили атмосферного тиску, що діє на нижню грань системи кубиків будуть однакові.

Запишемо умову рівноваги системи кубиків:

$$F = m_1g + m_2g$$

Розписавши сили, отримаємо:

$$\begin{cases} a^2 \cdot \left(\rho_A g \frac{7a}{6} + \rho_B g \frac{a}{2} \right) = \rho_1 a^3 g + \rho_2 a^3 g \\ \rho_B = 1,2 \rho_A = \frac{6\rho_A}{5} \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему знайдемо, що

$$\begin{cases} \rho_A = \frac{30(\rho_1 + \rho_2)}{53} \\ \rho_B = \frac{36(\rho_1 + \rho_2)}{53} \end{cases}$$

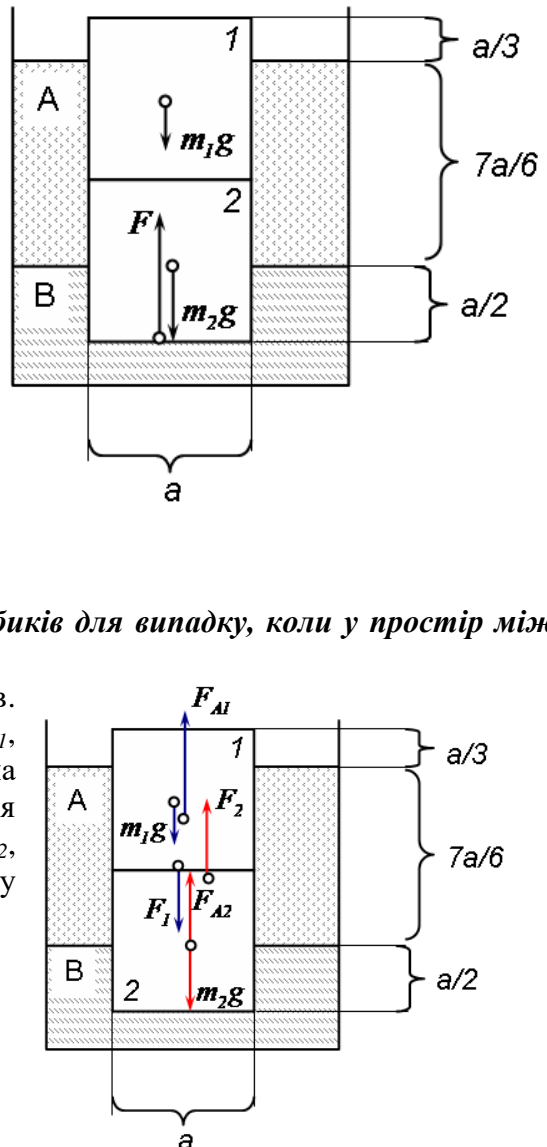
Відповідь: $\rho_A = \frac{30(\rho_1 + \rho_2)}{53}$; $\rho_B = \frac{36(\rho_1 + \rho_2)}{53}$

2-а) Знайдемо величину і напрям сил взаємодії кубиків для випадку, коли у простір між ними потрапляє рідина.

Розставимо сили, які діють на кожен з кубиків. На кубик 1 діє сила тяжіння m_1g , сила Архімеда F_{A1} , сила взаємодії кубика 2 - F_1 , припустимо, що ця сила направлена вниз; на другий кубик діють сила тяжіння m_2g , сила Архімеда F_{A2} , сила взаємодії кубика 1 - F_2 , яка направлена вгору (див рис.). Запишемо умову рівноваги для кожного кубика:

$$\begin{cases} m_1g + F_1 = F_{A1} \\ m_2g = F_2 + F_{A2} \end{cases}$$

Розписавши сили, які входять до цієї системи отримаємо:



$$\begin{cases} \rho_1 a^3 g + F_1 = \rho_A g \frac{2a}{3} \cdot a^2 \\ \rho_2 a^3 g = F_2 + \left(\rho_A g \frac{a}{2} \cdot a^2 + \rho_B g \frac{a}{2} \cdot a^2 \right) \end{cases}$$

Підставивши значення ρ_A та ρ_B , отримаємо, що $F_1 = F_2 = \left(\frac{20\rho_2 - 33\rho_1}{53} \right) ga^3$

З цього виразу слідує:

- ✓ Якщо $20\rho_2 > 33\rho_1$ сили будуть направлені так як показано на рисунку ;
- ✓ Якщо $20\rho_2 < 33\rho_1$, то сили будуть мати протилежні напрямки, до тих, які вказані на рисунку;
- ✓ Якщо $20\rho_2 = 33\rho_1$, то кубики взаємодіяти не будуть.

Відповідь: $F_1 = F_2 = \left(\frac{20\rho_2 - 33\rho_1}{53} \right) ga^3$

2-б) Знайдемо величину і напрям сил взаємодії кубиків для випадку, коли у простір між ними рідина НЕ потрапляє.

Якщо між кубиками не проникає рідина, отже, сила Архімеда на кубик 1 НЕ діє.

Розставимо сили, які діють на кожен з кубиків. На кубик 1 діє сила тяжіння m_1g , сила нормальної реакції N збоку кубика 2 ; на другий кубик діють сила тяжіння m_2g , вага кубика 1 - F_2 , сила тиску стовпчиків рідини F , яка діє на нижню грань кубика 2 (див рис.). Причому за величиною сили N та F_2 рівні. Запишемо умову рівноваги для будь-якого з кубиків:

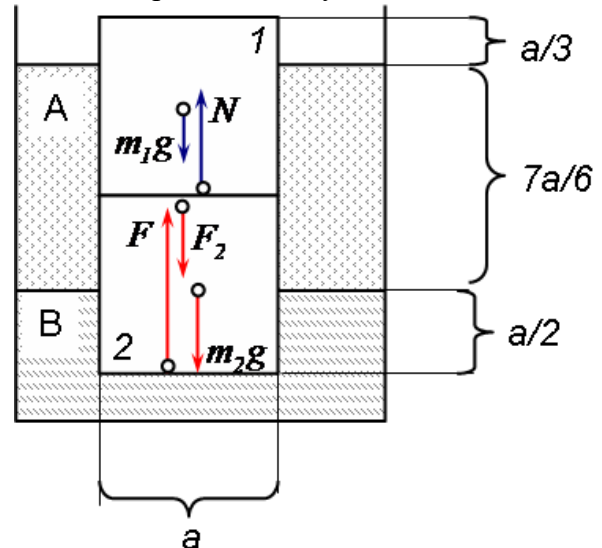
$$\begin{cases} N = m_1g = \rho_1 a^3 g \\ m_2g + F_2 = F \end{cases}$$

З першої умови значно простіше отримати величину сили взаємодії кубиків:

$$N = F_2 = \rho_1 a^3 g$$

Напрямки сил взаємодії кубиків вказані на рисунку.

Відповідь: $N = F_2 = \rho_1 a^3 g$



Критерії оцінювання

Правильно виконане завдання	Кількість балів
1. Правильно знайдені значення густин речовин А та В	2
2. Правильно знайдені величини сил взаємодії кубиків у випадку 2-а	1
3. Правильно вказані напрямки сил в залежності від співвідношення густин кубиків у випадку 2-а	3
4. Правильно розставлені сили для випадку 2-б та записані умови рівноваги кубиків	2
5. Правильно знайдені величини сил взаємодії кубиків у випадку 2-б	1