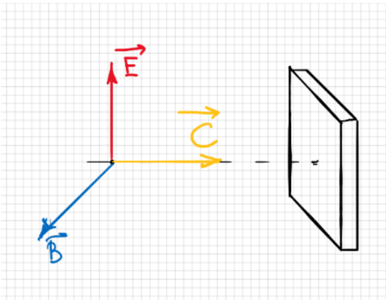
Третій (фінальний) етап.
11 клас.

Задача 1. «Розминка-солянка» (50 балів)



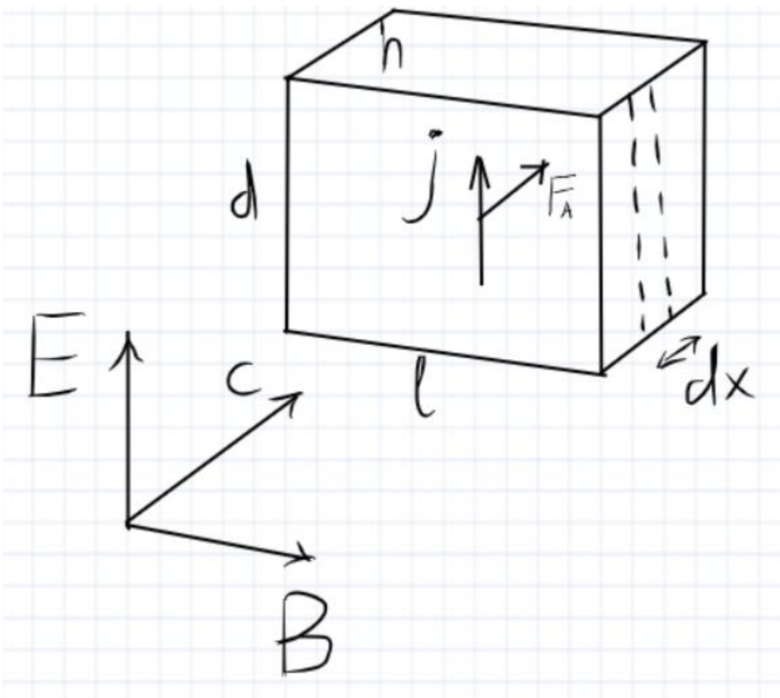
1. 1. «Хвильовий тиск» (15 балів)

Відомо, що жорстке електромагнітне випромінювання (наприклад, рентгенівське) може проходити крізь шар металу. Нехай плоска лінійно поляризована електромагнітна хвиля падає нормально (рис.1) на закріплену нерухомо металеву пластинку товщиною **h** (**h** набагато більше довжини хвилі) з питомим опором $\rho_{ел}$ та викликає в ній появу електричних струмів. Амплітудне значення напруженості електричного поля дорівнює **E**, а магнітної індукції **B**. Нехтуючи відбиванням енергії, крайовими ефектами та вторинним випромінюванням струмів, та вважаючи затухання хвилі невеликим, визначте **середній тиск** з боку електромагнітної хвилі на пластинку.

Рис.1

Розв'язання.

Розглянемо фрагмент пластинки зі сторонами l та d.



Електрична компонента електромагнітної хвилі викликає у пластині появу вертикального струму із густиною :

$$j(t) = \frac{E(t)}{\rho_{ел}}$$

Знайдемо струм в пластинці на відстані x від поверхні. Площа поперечного перерізу для такого струму l*dx. Тоді струм:

$$dI(t) = j(t)\mathrm{ldx} = \frac{E(t)}{\rho_{ел}}\mathrm{ldx}$$

З боку магнітного поля електромагнітної хвилі на цей струм діє сила Ампера:

$$dF_A = dI(t)B(t)d$$

Електромагнітна хвиля є біжучою, отже:

$$dF_A(t) = \frac{Esin(\omega t - kx)}{\rho_{ел}} Bsin(\omega t - kx) d * l * dx = \frac{EBsin^2(\omega t - kx)}{\rho_{ел}} Sdx$$

Тут S=d*l – площа фрагменту пластинки, на яку падає електромагнітна хвиля.

Тоді повний тиск на всю пластинку дорівнює:

$$p = \frac{1}{S}\int_0^h dF_A(t) = \frac{EB}{\rho_{ел}}\int_0^h sin^2(\omega t - kx)dx = \frac{EBh}{2\rho_{ел}}$$

1.2 «Магнітний годинник» (20 балів)

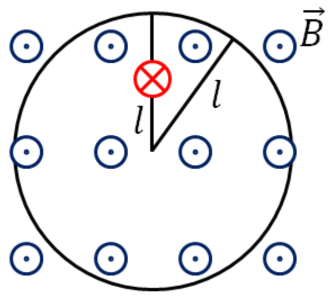


Рис.2.

Стрілки циферблата годинника та його **ó**бід виконано з металевого дроту з однакового матеріалу. Хвилинна та годинна стрілки мають однакову довжину $L = 9{,}00$ см, що є радіусом циферблату, рухаються плавно (без ривків) і дотикаються до обода. Усі контакти ідеальні. На годинній стрілці міститься маленька лампочка нехтовно малого опору, яка світитися, якщо струм, що проходить через неї, перевищує 0,9 А, і гасне, якщо струм стає меншим, ніж 0,9 А. **Покажіть вид графіку** (вкажіть на ньому характерні значення часу) залежності сили струму у лампочці від часу протягом доби, починаючи від опівночі, якщо годинник помістити в однорідне магнітне поле індукцією $B = 480$ мТл, силові лінії якого перпендикулярні площині годинника (рис. 2). Опір одиниці довжини дроту, з якого виготовлені стрілки та обід, $\lambda = 1{,}57 * 10^{-5}$ Ом/м. Визначте, **скільки часу** світитиметься лампочка протягом доби. Вважайте $\pi = 3{,}14$.

Розв'язання.

Дано:
$l = 9$ см
$T = 12$ год
$B = 0{,}48$ Тл
$\lambda = 1{,}25 *$
10^{-5} Ом/м

$I(t)-?$
$\Delta t-?$

Під час руху стрілки у зовнішньому магнітному полі кожна її маленька ділянка стає джерелом електричного струму.
Розглянемо нескінченно малу ділянку стрілки, яка обертається з деяким періодом τ довжиною dx на відстані x від центру циферблата:
ЕРС, яка виникає у цій ділянці:

$$d\varepsilon = Bv_x dx \sin 90°. \qquad (1)$$

Швидкість цієї ділянки:

$$v_x = \frac{2\pi x}{\tau}. \qquad (2)$$

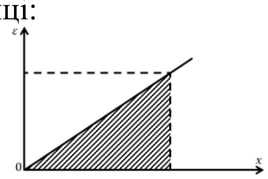
$$d\varepsilon = \frac{2\pi Bxdx}{\tau}. \qquad (3)$$

Загальну ЕРС, яка виникає у всій стрілці, можна знайти декількома способами:

1) швидкість частин стрілки зростає лінійно при збільшенні відстані від центру циферблата.
Тоді можна використовувати середнє значення величини ЕРС

$$\varepsilon = \frac{\frac{2\pi Bl^2}{\tau} - 0}{2} = \boldsymbol{\frac{\pi Bl^2}{\tau}}.$$

2) побудуємо залежність величини $\frac{2\pi Bx}{\tau}$ від відстані від центру циферблата x. Площа фігури під цим графіком має фізичний сенс ЕРС, яка виникає у всій хвилинній стрілці:

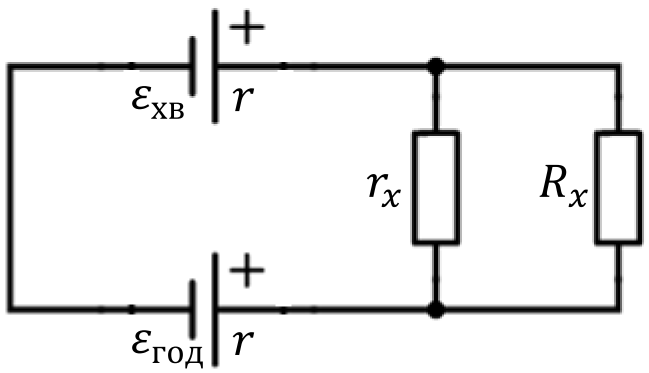


$$\varepsilon = S_{\text{фіг}} = \frac{2\pi Bl^2}{2\tau} = \boldsymbol{\frac{\pi Bl^2}{\tau}}.$$

3) сумарна ЕРС визначається за правилами додавання (інтегрування):

$$\varepsilon = \int_0^{\varepsilon} d\varepsilon = \int_0^{l} \frac{2\pi Bxdx}{\tau} = \frac{2\pi B}{\tau}\int_0^{l} xdx = \frac{2\pi B}{\tau}\left(\frac{l^2}{2} - 0\right) = \boldsymbol{\frac{\pi Bl^2}{\tau}}. \qquad (4)$$

У довільний момент часу t еквівалентне електричне коло має вигляд:



де $r = \lambda l$ – опір стрілок; (5)
$r_x = \lambda l_x$ – опір ділянки обода між стрілками;
$R_x = \lambda(2\pi l - l_x)$ – опір зовнішньої ділянки обода.

$$l_x = \left(\frac{2\pi l}{\frac{T}{12}} - \frac{2\pi l}{T}\right)t = \frac{22\pi l t}{T},$$ (6)

де $T = 12$ год – період обертання годинної стрілки.

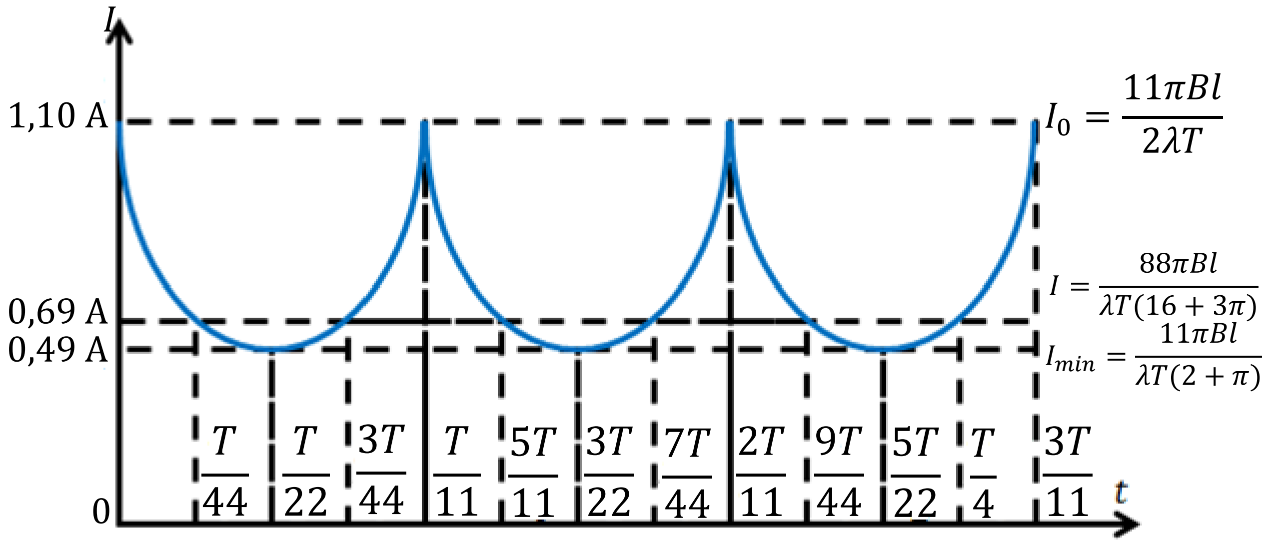
За законом Ома для повного кола:

$$I = \frac{\varepsilon_{\text{хв}} - \varepsilon_{\text{год}}}{\frac{r_x R_x}{r_x + R_x} + 2r}.$$ (7)

$$I = \frac{11\pi B l^2}{T\left(\frac{\lambda l_x \lambda(2\pi l - l_x)}{2\pi l \lambda} + 2\lambda l\right)} = \boxed{\frac{\boldsymbol{11\pi B l}}{\boldsymbol{2\lambda T\left(1 + \frac{11\pi t}{T} - 121\pi\left(\frac{t}{T}\right)^2\right)}}}.$$ (8)

Функція (8) визначає залежність сили струму у хвилинній стрілці від часу.
Графік даної функції

- при $t \in \left[0; \frac{T}{22}\right]$ має вигляд квадратичної гіперболи;
- при $t \in \left[\frac{T}{22}; \frac{T}{11}\right]$ є симетричним відтворенням попередньої гілки;
- а надалі періодично повторюється.



Максимальне значення струму чисельно дорівнює

$$\boldsymbol{I_0} = \frac{\boldsymbol{11\pi B l}}{\boldsymbol{2\rho T}} = \frac{\boldsymbol{11 * 3,14 * 480 * 10^{-3} * 9 * 10^{-2}}}{\boldsymbol{2 * 1,57 * 10^{-5} * 12 * 3600}} = \boldsymbol{1,10}\ \text{А}$$ (9)

З урахуванням того, що лампочка починає світитися лише за сили струму, більшій за 0,9 А, то протягом часу, доки годинна і хвилинна стрілки не співпадуть знову, лампочка світиться на початку свого руху, після чого гасне, а потім запалюється під кінець періоду. Моменти часу, коли лампочка гасне чи запалюється визначимо, підставивши числові значення у рівняння (8):

$$0,9 = \frac{1,1}{1 + \frac{11\pi t}{T} - 121\pi\left(\frac{t}{T}\right)^2}$$ (10)

Після математичних перетворень отримаємо квадратне рівняння:

$$\frac{0,9}{\pi}\left(\frac{11\pi t}{T}\right)^2 - 0,9\left(\frac{11\pi t}{T}\right) + 0,2 = 0$$ (11)

Звідки

$$\frac{11\pi t}{T}=\frac{0{,}9\pm\sqrt{0{,}9^2-0{,}8*\frac{0{,}9}{\pi}}}{2*\frac{0{,}9}{\pi}}=\frac{\pi\left(1\pm\sqrt{1-\frac{0{,}8}{0{,}9\pi}}\right)}{2}, \qquad (13)$$

Звідки

$$\boxed{\boldsymbol{t=\frac{1\pm\sqrt{1-\frac{0,8}{0,9\pi}}}{22}T}} \qquad (14)$$

Перший момент часу, коли лампочка гасне:

$$\boldsymbol{t_1=\frac{1-\sqrt{1-\frac{0,8}{0,9*3,14}}}{22}*12*3600=301}\text{ с.} \qquad (15)$$

Отже, протягом доби лампочка світиться протягом

$$\boldsymbol{\Delta t=44t_1=13244}\text{ с.}$$

Відповідь:

$$\boxed{\boldsymbol{I=\frac{11\pi Bl}{2\lambda T\left(1+\frac{11\pi t}{T}-121\pi\left(\frac{t}{T}\right)^2\right)}}}$$

$$\boxed{\Delta\boldsymbol{t}=\boldsymbol{13244}\text{ с}=\boldsymbol{220}\text{ хв }\boldsymbol{44}\text{ сек}=\boldsymbol{3}\text{ год }\boldsymbol{40}\text{ хв }\boldsymbol{44}\text{ сек}}$$

1.3 «Вгору по стінці» (15 балів)

Деякі рідини здатні підійматись по стінкам посудин значно вище, ніж це дозволяє їх коефіцієнт поверхневого натягу. Оцінити цей ефект можна, розглянувши взаємодію між атомами рідини та атомами стінки посудини. Для моделювання взаємодії одного атому стінки із атомом рідини добре підходить формула Ленарда-Джонса: $U(r) = \frac{\alpha}{r^{12}} - \frac{\beta}{r^6}$, де $U(r)$ – функція залежності енергії взаємодії від відстані між атомами, $\alpha = 53 * 10^{-139}$ Дж$*$ м^{12}, $\beta = 0.73 * 10^{-80}$ Дж$*$ м^6. g=9.8 м/с^2.

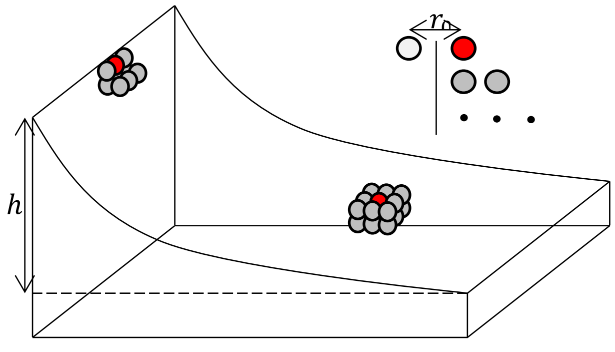
Вважати, що енергія взаємодії атома рідини зі стінкою набагато більше за енергію його взаємодії з іншими атомами рідини. Для зручності, враховувати взаємодію лише найближчих атомів. Маса атому рідини m=$66 * 10^{-27}$ кг. **Оцініть**, якої висоти зможе дістатися хоч якась частина рідини.

Оцініть, який коефіцієнт поверхневого натягу має мати рідина, щоб її меніск доходив до такої висоти. Проаналізуйте відповідь на адекватність. Така оцінка буде непогано працювати для дуже багатьох рідин. **Вкажіть** можливі причини того, чому, наприклад, для звичайної води не спостерігається такої її поведінки при контакті зі стінкою посудин, в яких вона зберігається. Коефіцієнт поверхневого натягу води за температури 20 ^{0}С дорівнює 73 мН/м.

Розв'язання.

За умовою, взаємодія атому рідини зі стінкою набагато більша за значенням, ніж енергія її взаємодії з іншими атомами рідини. Тому атоми рідини, що «відчули» притягання до атомів стіни, починають стрімко підійматися вгору вздовж стінки. Під час цього процесу шар рідини поблизу стіни буде зменшуватися з висотою. Максимальною можна вважати висоту, до якої досягне хоча б одна молекула як показано на рисунку. Нехай наша посудина має нескінченно високі стінки, що дозволить досягнути такого ефекту (деякі рідини здатні підніматися достатньо високо).

Так як поверхня рідини у стані рівноваги еквіпотенційна, то напишемо закон збереження енергії для атому рідини, обравши за нульовий рівень потенційної енергії сили тяжіння ту частину, де поверхня рідини практично горизонтальна:



$$W_1 = W_2$$

$$W_1 = W_{\text{з водою}_1}$$

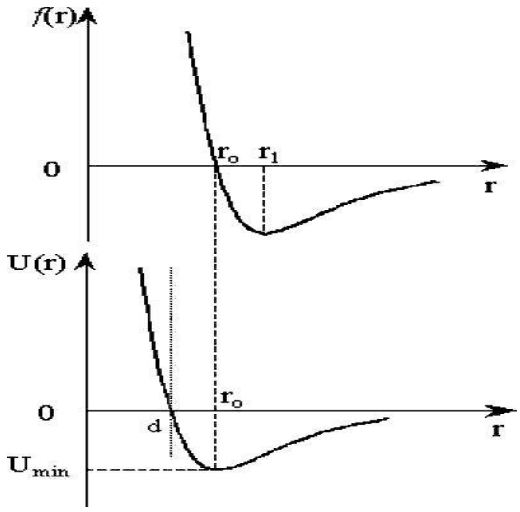
$$W_2 = W_{\text{зі стінкою}} + W_{\text{з водою}_2} + mgh$$

$$\left(\frac{a}{{r_0}^{12}} - \frac{b}{{r_0}^{6}}\right) + (W_{\text{з водою}_2} - W_{\text{з водою}_1}) + mgh = 0$$

Не зважаючи на те, що у першому та другому положеннях атом беспосередньо взамодіє з різною кількостю атомів рідини, цією енергією можна знехтувати у порівнянні з енергією взаємодії атома рідини з атомами стіни: $W_{\text{з водою}_2} - W_{\text{з водою}_1} \approx 0$

Тоді отримуємо у стані рівноваги: $\left(\frac{a}{{r_0}^{12}} - \frac{b}{{r_0}^{6}}\right) + mgh = 0,$

де r_0 – це середня відстань між атомами стіни та рідини, що досягли найвищої висоти, підіймаючись угору.



Значення r_0 можна оцінити з тих міркувань, що у положенні рівноваги, де рівнодійна сил міжатомного притягання та відштовхування дорівнює нулю, спостерігається потенційна «яма». Візьмемо похідну від виразу енергії:

$$F = U' = 0$$

$$-\frac{12}{{r_0}^{13}} + \frac{6b}{{r_0}^{7}} = 0$$

$$\boxed{r_0 = \sqrt[6]{\frac{2a}{b}}}$$

Враховуючи це, закон збереження енергії дає наступне значення максимальної висоти.

$$\frac{ab^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a} + mgh = 0$$

$$\boxed{h = \frac{b^2}{4mga}} = 3.8\text{м}$$

Для знаходження висоти підняття рідини скористуємося законом Ньютона для частини рідини, рівень якої вище за рівень горизонтальної поверхі рідини, вважаючи змочування повним.

$\sigma \cdot \Delta L = \rho \cdot g \frac{h^2}{2} \Delta L.$

Це дасть нам наступний вираз та оціночне значення коеффіцієнту поверхневого натягу для густини води:

$$\sigma = \rho \cdot g \frac{h^2}{2}\text{=71 кН/м.}$$

Як бачимо, це значення суттєво перевищує порядок табличних значеннь коеффіцієнтів. Це підтверджує, що для рідин, для молекул яких сила притягання до стіни значно більша за сили притягання однієї до іншої, «працює» зовсім інша модель повединки рідини. Існує велика кількість факторів, що впливає на здійсненність такого явища, найбільш суттєвим з яких на наш погляд є в'язкость рідини та великий вплив випаровування, яким ми при розв'язанні знехтували.

Задача 2. «Фотони-електрони» (50 балів)

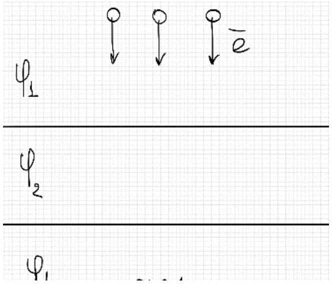


Рис.3.

2.1. **(20 балів)** Проходження світла через зони з різними показниками заломлення є достатньо відомою оптичною задачею. Одним з її результатів є той факт, що при нормальному падінні променів на межу двох прозорих середовищ з різними показниками заломлення, частина світлової енергії відбивається. Енергетичний коефіцієнт відбивання світла при цьому може бути розрахований наступним чином:

$R = \left(\frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1}\right)^2$, де $\boldsymbol{n_2}, \boldsymbol{n_1}$ – показники заломлення середовищ по різні сторони від поверхні розділу. Цікаво, що аналогічну теорію можна застосувати й до потоку електронів.

Уявіть, що в нескінченій області з потенціалом $\boldsymbol{\varphi_1} = 16{,}58$ В знаходиться плоскопаралельна область кінцевої товщини з потенціалом $\boldsymbol{\varphi_2} = 15{,}00$ В (рис. 3). Пучок електронів падає нормально на цю плоскопаралельну область зі швидкістю $V_1 = 10^6$ м/с. Визначте, **яка частина електронів пройде** крізь область з потенціалом φ_2. Вважайте, що ймовірність зіткнення електронів між собою вкрай мала, кулонівською взаємодією між електронами знехтуйте, інтерференційні ефекти не враховуйте. Заряд електрону $\boldsymbol{q_e} = 1{,}6 * 10^{-19}$ Кл, маса електрону $\boldsymbol{m} = 9{,}1 * 10^{-31}$ кг.

2.2 **(10 балів)** Відомо, що мінімальний розмір предметів, які можуть бути розрізненими за допомогою мікроскопу, має значення дуже близьке до довжини хвиль, що використовуються при дослідженнях. Наприклад, для оптичних мікроскопів значення цієї довжини хвилі можна для зручності вважати рівним 500 нм.

Для спостережень за більш дрібними об’єктами використовують електронний мікроскоп, який фокусує потоки електронів замість світлових пучків. Історично в основі квантової механіки лежало припущення, що будь-які частинки (навіть ті, що мають масу) можуть виявляти не тільки корпускулярні, але й хвильові властивості. Тобто, кожна частинка ототожнюється із квантом (порцією) енергії. Співвідношення між енергією та імпульсом такого кванту буде таким самим, як і для фотону.

Оцініть, у скільки разів **зміняться розміри** найдрібніших предметів, що можуть бути досліджені за допомогою мікроскопу, якщо замість оптичного мікроскопу використати електронний. Вважайте, що електрони в мікроскопі розганяються зі стану спокою напругою 150 В. Релятивістськими ефектами знехтувати. Стала Планка $\boldsymbol{h} = 6{,}63 * 10^{-34}$ Дж $*$ с.

2.3. **(20 балів)** Під час дослідження розрідженого інертного газу його опромінюють електронним пучком, що прискорюється невеликою напругою, яку можна змінювати. У результаті цих досліджень було отримано графік залежності сили струму від прискорюючої напруги.

Графік являє собою послідовність максимумів та мінімумів струму (рис.4). **Перший максимум** струму та **наступний** за ним **мінімум** струму спостерігалися за прискорюючих напруг $\boldsymbol{U_1} = 1{,}10$ В та $\boldsymbol{U_2} = 4{,}30$ В. Для пояснення цього ефекту можна застосувати наближену модель, в якій:

а) атом – це частина простору, з чіткими межами, потенціал якої різко відрізняється від потенціалу електростатичного поля зовні так, як показано на рис.5;

б) електрон – це хвиля, яка пролітає крізь атом, та якій притаманні хвильові властивості – наприклад інтерференція.

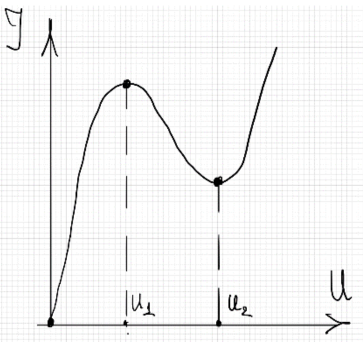


Рис.4.

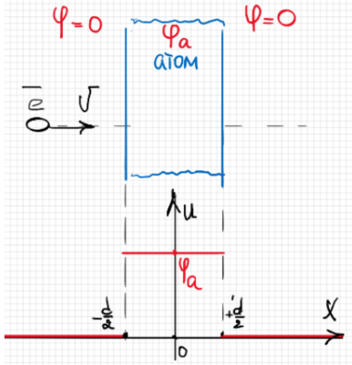


Рис.5.

Поясніть наявність мінімумів та максимумів на рис.4 та **розрахуйте ефективний**

розмір атомів **d** цього інертного газу та **значення потенціалу** атому **φ_a**.

Розв'язання.

2.1 При переході між зонами з різними потенціалом електрони змінюють свою швидкість. Отже, в даній задачі потік електронів можна розглядати як світловий промінь, що падає на плоскопаралельну пластину з коефіцієнтом заломлення, відмінним від навколишнього середовища.

За законом збереження енергії знайдемо швидкість електронів в зоні з потенціалом φ_2:

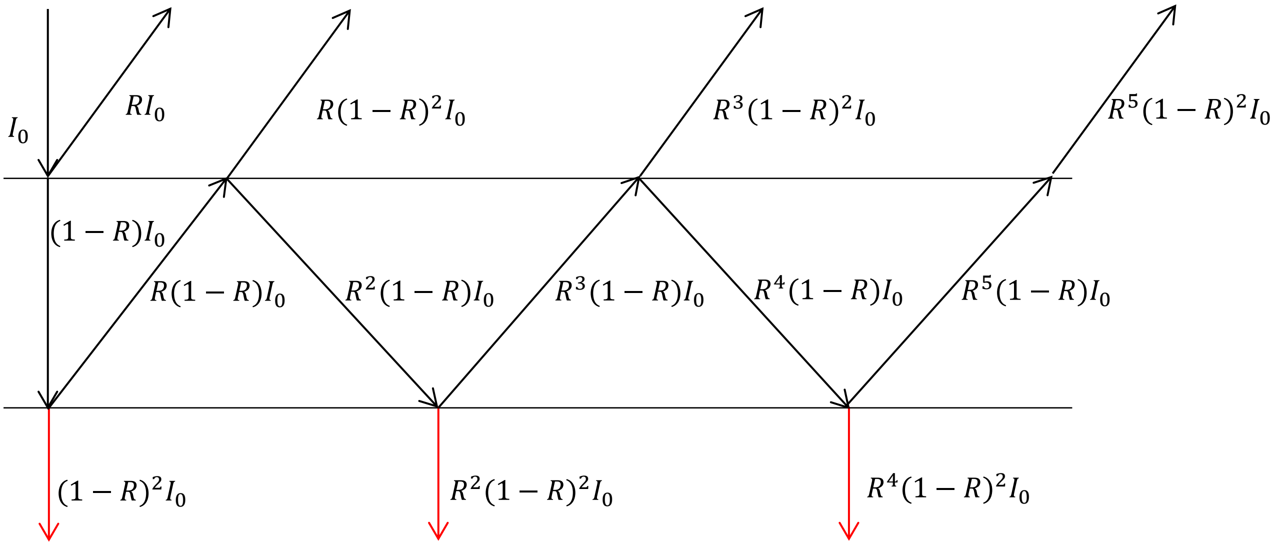
$$-q_e\varphi_1 + \frac{mV_1{}^2}{2} = -q_e\varphi_2 + \frac{mV_2{}^2}{2}$$

$$V_2 = \sqrt{V_1{}^2 - q_e(\varphi_1 - \varphi_2)} < V_1$$

Застосуємо оптичну аналогію, знайшовши відносний коефіцієнт заломлення зони з потенціалом φ_2 відносно зони з φ_1: $n = \frac{V_1}{V_2}$.

Звідси коефіцієнт відбиття $R = \frac{(n-1)^2}{(n+1)^2}$

При проходженні електронів крізь зону з потенціалом φ_2 пучок електронів буде багаторазово розділятись і буде відбуватись нескінченно повторюване відбиття та проходження частини пучка падаючих електронів як це зображено нижче на рисунку:



Додамо всі пучки, які проходять крізь зону з потенціалом φ_2 та скористаємось формулою для суми геометричної прогресії:

$$\sum I = (1-R)^2 I_0 + R^2(1-R)^2 I_0 + R^4(1-R)^2 I_0 + \cdots = \frac{(1-R)^2}{1-R^2} I_0 = I_0 \frac{0.96^2}{1 - 16 * 10^{-4}} = 0.923\, I_0$$

$\frac{I}{I_0} = 92.3\%$ - отримуємо кількість електронів, що пройде крізь плоскопаралельну зону.

2.2 За квантовою теорією частинки, які мають масу, можуть розглядатись як хвилі. Отже, необхідно знайти довжину хвилі, яка відповідає поведінці пучків електронів. Знайдемо швидкість електронів, які розганяються потенціалом U з закону зміни енергії:

$$\frac{mV^2}{2} = q_e U,$$

$$V = \sqrt{\frac{2q_eU}{m}},$$

Імпульс цих електронів: $p = \sqrt{2meU}$.

Співвідношення, яке пов'язує довжину хвилі частинок, які мають масу, та їх імпульси, описується гіпотезою де Бройля. Виведемо його зі співвідношення між енергією кванта та його імпульсом, яке постулюємо таким самим, як і для фотона:

$$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda} = pc$$

Звідси: $\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2meU}} = \frac{6.63*10^{-34}}{\sqrt{2*9,1*10^{-31}*16*10^{-20}*150}}\text{м} = 10^{-10}\text{м}$

$$\frac{\lambda_{\text{опт}}}{\lambda_{\text{електр}}} = \frac{500 * 10^{-9}}{10^{-10}} = 5000$$

2.3 Напруги, що прискорюють електрони, при яких спостерігаються максимуми та мінімуми на графіку залежності струму в системі є меншими, ніж потенціали збудження атомів, які фігурують в аналогах дослідів Франка і Герца (особливо явно це проявляється для так званих благородних газів), де відбувались непружні удари електронів з атомами через наявність у атоми внутрішньої структури (квантових рівнів). Отже, причини наявності максимумів та мінімумів на графіку є іншими. В реальності при малих напругах максимуми та мінімуми спостерігаються на графіку через явище інтерференції електронів на атомі (аналог просвітленої оптики). Це явище має назву ефекта Рамзауера.

Якщо ми знаємо напруги, при яких відбувається підсилення або послаблення потоку електронів через газ, то записуючи умови максимумів та мінімумів проходження електронів як хвиль крізь атом (який, для спрощення, ми розглядаємо у вигляді плоскопаралельної пластинки із потенціалом, відмінним від навколишнього нульового) можна отримати оціночні значення розміру атома та середнього потенціалу всередині нього.

Знайдемо спочатку коефіцієнти заломлення в атомі для електронної хвилі.

За Законом Збереження Енергії: $eU = -e\varphi_A + \frac{mV^2}{2}$

$$V = \sqrt{\frac{2eU}{m}(U+\varphi_A)}$$

$$V_0 = \sqrt{\frac{2eU}{m}}$$

$$n = \frac{V}{V_0} = \sqrt{\frac{(U+\varphi_A)}{U}}$$

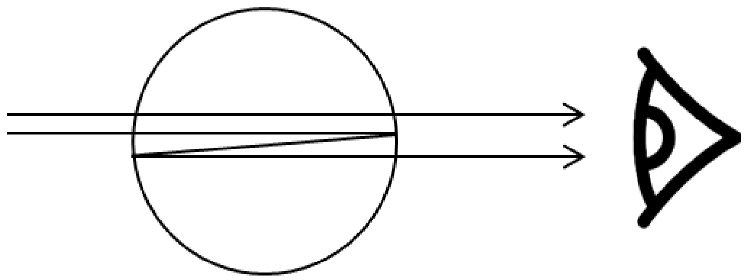
$$n_1 = \frac{V}{V_0} = \sqrt{\frac{(U_1+\varphi_A)}{U_1}}$$

$$n_2 = \frac{V}{V_0} = \sqrt{\frac{(U_2+\varphi_A)}{U_2}}$$

Довжина хвилі електронів у міжатомному просторі після прискорення певним потенціалом U (див. попередній пункт 2.2):

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2meU}}$$

Знайдемо умови максимуму та мінімуму на графіку через умови на оптичні різниці ходу:



$\Delta = 2dn_1 = 2k\frac{\lambda_1}{2}$ - максимум

$2dn_2 = (2k+1)\frac{\lambda_2}{2}$ – мінімум

Запишемо рівняння для першого максимуму та першого мінімуму (за умовою задачі k для максимуму = 1; k для мінімуму = 1):

$$\begin{cases} 2d\sqrt{U_1+\varphi_A} = \frac{hk}{\sqrt{2me}} = \frac{h}{\sqrt{2me}} \\ 2d\sqrt{U_2+\varphi_A} = \frac{h(2k+1)}{2\sqrt{2me}} = \frac{3h}{2\sqrt{2me}} \end{cases}$$

Розв’язуючи систему, отримуємо: $\varphi_A = \frac{9U_1-4U_2}{5} = 1.46$ В

$$d = \frac{h\sqrt{5}}{\sqrt{32me(U_2-U_1)}} \approx 3.8 * 10^{-10}\text{м}$$

Задача 3. «І знову гравітаційна лінза». (50 балів)

3.1. **(20 балів)** Фотон пролітає повз зорю з масою **M**. Головною особливістю гравітаційного поля, як відомо, є той факт, що вона надає однакового прискорення всім тілам. Як наслідок, гравітаційне поле здатне відхиляти світлові промені. Використовуючи цей факт та розмірні оцінки, **знайдіть кут *α***, на якій повернеться напрям руху фотону.

Вважати, що:

- цей кут дуже малий;
- гравітація істотно впливає на траєкторію лише на ділянці максимального зближення фотону з зорею коли відстань між ними складає **R**;
- чисельний коефіцієнт біля виразу дорівнює **4**;
- швидкість фотона дорівнює швидкості світла у вакуумі **c**.

Примітки:

а) для спрощення траєкторію променю можна рисувати у вигляді ламаної;
б) якщо Вам не вдалося отримати вираз для кута α, то у наступних пунктах вважайте що він обернено пропорційний до відстані R з деяким відомим коефіцієнтом пропорційності Z.

3.2. **(15 балів)** Між спостерігачем **C** та зорею **З** на одній прямій знаходиться галактика масою M. Використовуючи результат з попереднього пункту, **поясніть** який вигляд буде мати зірка для цього спостерігача. Знайдіть **кутовий розмір** зображення цієї зірки? Усі кути вважати малими. Розміром галактики та зорі знехтувати. Відстань між спостерігачем та галактикою $\mathbf{L_1}$, зорею та галактикою $\mathbf{L_2}$ (рис. 6).

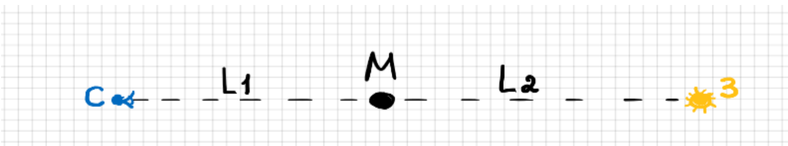


Рис.6

3.3. **(15 балів)** Припустимо, що для подальших розрахунків чисельне значення кутового розміру зображення з п.3.2. дорівнює 1,73 кутових секунди. Нехай тепер спостерігач у тій самій точці рухається зі швидкістю **c/2** вздовж прямої C- З у напрямку галактики. **c**$=3\cdot10^8$ м/с – швидкість світла у вакуумі.

а) Визначити, яким тепер стане **кутовий розмір** зображення зорі для спостерігача в цьому випадку?

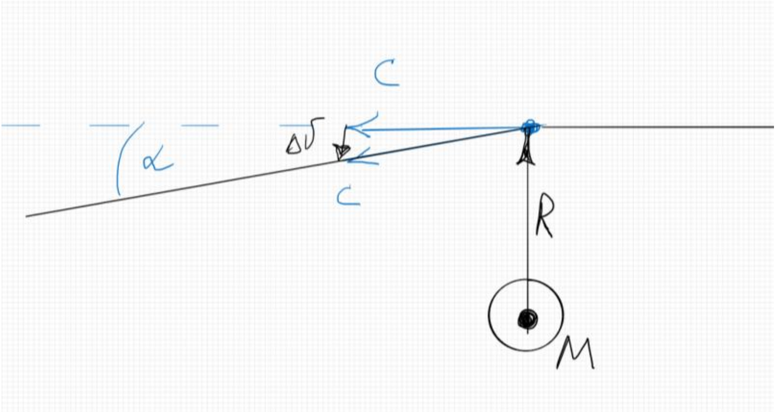
б) Знайти, у скільки разів внаслідок такого руху зміниться **довжина хвилі**, на яку припадає максимум випромінювання зорі?

в) Спробуйте **аргументовано охарактеризувати** зображення зорі, яким його побачить спостерігач, який буде ***<u>віддалятися</u>*** від галактики зі швидкістю, максимально наближеною до **c**?

Розв'язання.

1.1. Наведемо можливий варіант розв'язання.

Поблизу зорі фотон набуває прискорення: $\alpha = \frac{GM}{R^2}$



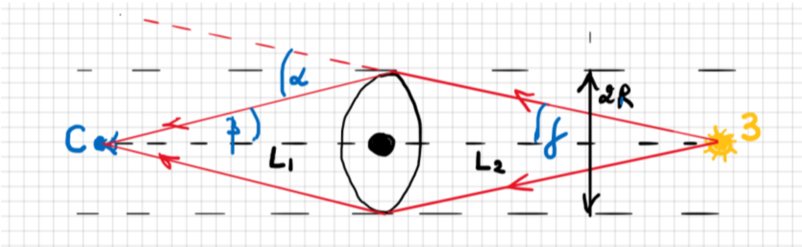
Внаслідок чого швидкість змінюється за напрямком і її приріст за оціночний час R/c можна оцінити як: $\Delta\upsilon = \frac{GM}{R^2} \cdot \frac{R}{c}$

Тому кут зміни напряму фотону: $\alpha \sim \frac{GM}{R \cdot c^2} \Rightarrow \alpha = \frac{4GM}{R \cdot c^2}$.

2.2. Внаслідок симетрії бачимо, що для спостерігача зображення зорі має вигляд кільця. Знайдемо, наприклад, його кутовий радіус β як $\beta = \frac{R}{L_1}$

Як бачимо, β=α-γ, де $\beta = \frac{R}{L_2}$.

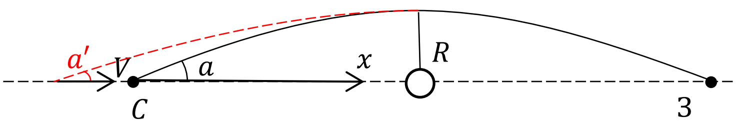
Враховуючи це та результат попереднього пункту:



$$R\left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}\right) = \frac{4GM}{R \cdot c^2} \Rightarrow R^2 = \frac{4GML_1L_2}{c^2(L_1 + L_2)}$$

$$\beta = \frac{R}{L_1} = \sqrt{\frac{4GML_2}{c^2L_1(L_1 + L_2)}}$$

3.3. а) Застосуємо релятивістський закон додавання швидкостей*:*



$$U_x = \frac{U_x + V}{1 + \frac{U_x' V}{c^2}} \Rightarrow U_x' = \frac{U_x - V}{1 - \frac{U_x V}{c^2}}$$

$U_x, U_x{}'$
$-$ це проекції швидкості тіла на напрямок руху спостерігача у двох різних системах відліку

V $-$ швидкість спостерігача

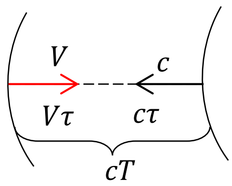
Зрозуміло, що $\mathrm{U_x} = -\mathrm{c}\cos \mathrm{a}\,, \mathrm{U_x}' = -\mathrm{c}\cos \mathrm{a}' \Longrightarrow -\cos \mathrm{a}' = \frac{-\cos\mathrm{a} - \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{c}}}{1+\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{c}}\cos\mathrm{a}} \Longrightarrow \boxed{\cos \mathrm{a}' = \frac{\cos\mathrm{a}+\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{c}}}{1+\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{c}}\cos\mathrm{a}}}$

Як бачимо, кути дуже малі, тому застосуємо наближені формули розрахунку косинуса:

$$1 - \frac{a'^2}{2} = \frac{c\cos a + V}{c + V\cos a} = \frac{c - c\dfrac{a^2}{2} + V}{c + V - V\dfrac{\mathrm{a}^2}{2}}$$

$$a' = \sqrt{\frac{c - V}{c + V}}\,\mathrm{a}$$

За умовою $\mathrm{V} = \frac{\mathrm{c}}{2} \Longrightarrow \mathrm{a}' = \frac{\varphi}{\sqrt{3}}\mathrm{M} \approx 1''$.



б) Розглянемо, як буде змінюватися довжина хвилі внаслідок руху приймача назустріч світловим променям (ефект Доплера).

Нехай, T-період хвилі у системі відліку, в якій спостерігач нерухомий

$(V + c)\tau = cT$

$$\tau = \frac{\mathrm{T}}{1 + \dfrac{\mathrm{V}}{\mathrm{c}}}$$

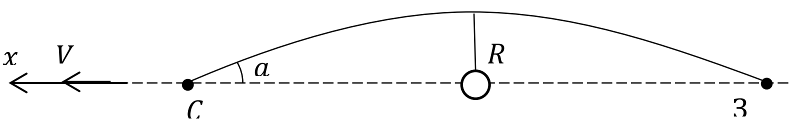
τ- інтервал часу між отриманням сигналу рухомим спостерігачем з точки зору нерухомого

$\mathrm{T}' = \tau'$- цей інтервал у системі відліку «рухомий спостерігач».

$$T' = \tau' = \tau\sqrt{1 - \left(\frac{\mathrm{V}}{c}\right)^2} = \frac{T}{1 + \dfrac{\mathrm{V}}{c}}\sqrt{1 - \left(\frac{\mathrm{V}}{c}\right)^2} = T\sqrt{\frac{1 - \dfrac{\mathrm{V}}{c}}{1 + \dfrac{\mathrm{V}}{c}}} \Longrightarrow \nu' = \nu\sqrt{\frac{1 + \dfrac{\mathrm{V}}{c}}{1 - \dfrac{\mathrm{V}}{c}}}$$

Тоді, $$\frac{\lambda'}{\lambda} = \frac{\nu}{\nu'} = \sqrt{\frac{1 - \dfrac{\mathrm{V}}{c}}{1 + \dfrac{\mathrm{V}}{c}}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

в) Розглянемо випадок з віддаленням спостерігача.



$$U_x = \frac{U_x - V}{1 - \dfrac{U_x{}'V}{c^2}}$$

Зрозуміло, що $U_x = c\cos a$, $U_x{}' = c\cos a' \Longrightarrow \boxed{\cos a' = \frac{\cos a - \frac{V}{c}}{1 - \frac{V}{c}\cos a}}$

Нехай $V \to c$, тоді $\cos a' = \frac{\cos a - 1}{1 - \cos a} = -1$

Тобто зображення зорі виявляється попереду спостерігача і поступово стискається у точку.

Довжина хвилі, що сприймається спостерігачем, буде суттєво зростати:

$$\lambda' = \lambda\sqrt{\frac{1 + \frac{V}{c}}{1 - \frac{V}{c}}}$$

Задачі запропонували: Мєшков О.Ю., Олійник А.О., Пашко М.І.