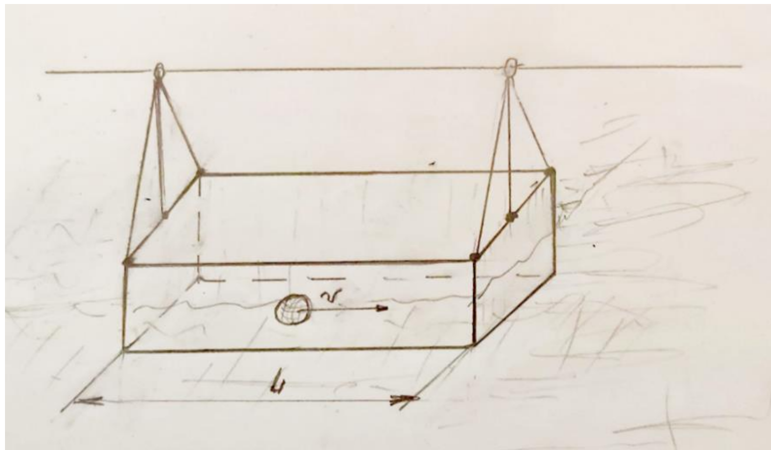
Відкритий всеукраїнський фізичний марафон 10 клас

3 етап 28.03.2021

1. Кулька і коробка. Вздовж горизонтального стрижня, як по направляючий ковзає без тертя коробка масою m=90 г та довжиною L=27 см. Коробка частково занурена у рідину, а її задня та передня стінки перпендикулярні до стрижня. Посередині коробки знаходиться алюмінієва кулька такою ж масою, як і коробка m=90 г. Кулька без тертя може переміщуватися по дну коробки. У початковий момент коробка не рухається, а кульці надають горизонтальну швидкість v=2,7 м/с, спрямовану вздовж стрижня. Вважаючи зіткнення кульки зі стінками абсолютно пружними, знайдіть на яку відстань ***S*** переміститься до зупинки коробка і скільки ударів ***n*** о стінки зробить кулька за цей час? З боку рідини на коробку діє пропорційна швидкості руху сила в'язкого тертя $F=k$v, де k=0,2 кг/с. Відстань S надати у м з точністю до десятих. **(8 балів)**



Розв'язання.

Врахуємо розміри кульки.

1. Густина алюмінію ρ=2,7 г/см^3. Радіус алюмінієвої кульки: $R=\sqrt[3]{\frac{3m}{4\pi\rho}}$ = 2 см.

2. Як відомо і можна показати із законів збереження, після прямого центрального пружного удару двох тіл однакової маси, вони обмінюються швидкостями руху. Кулька, після удару о праву стінку зупиняється, її маса дорівнює масі коробки, а коробка, придбавши швидкість V, рухається у в'язкому середовищі і до моменту другого зіткнення з кулькою проходить відстань L–2R. У момент другого зіткнення швидкість коробки за рахунок опору стала меншою V_1<V. Після другого зіткнення коробка зупиняється, а кулька придбавши швидкість V_1 рухається до правої стінки і після удару надає коробці її колишню швидкість V_1 і т. д.

Висновок:

1. Можна розглядати рух коробки як безперервний процес - рух до зупинки у в в'язкий рідині.

2. На відрізку шляху в L-2R відбувається 2 зіткнення.

Запишемо другий закон Ньютона:

$$m\frac{\Delta v}{\Delta t} = -kv \;\Rightarrow\; m\Delta v = -kv\Delta t \;\Rightarrow\; m\Delta v = -k\Delta S \Rightarrow$$
$$m(-v) = -kS.$$

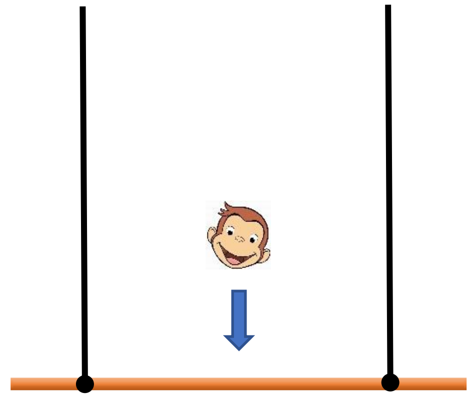
Шлях коробки до зупинки:

$$S = \frac{mv}{k} = 1{,}215 \text{ м} \approx 1{,}2\text{м}.$$

На цьому шляху коробка зробила S / (L–2R) = 5,28 переміщень.
З них повних переміщень 5, за кожне з яких відбулося 2 зіткнення, а неповне переміщення дає ще одне зіткнення.
Тому: S =1,2 м; N =2× 5+1=11.

Ймовірно, що більшість не стане враховувати розміри кульки. За звичкою. Але ж нехтувати можна, лише порівнявши, якщо в умові про це не сказано. Тоді у них вийде: S / L= 4,5 переміщень. Слід округлити у меншу сторону до 4-х і тоді N =2× 4+1=9.

2. Мавпа на жердині. Легка жердина підвішена на двох однакових паралельних легких гумових стрічках. Мавпа забралася на середину жердини і трохи погойдалася.



1) Доведіть у загальному випадку, що період малих вертикальних коливань мавпи на жердині менший за період її малих горизонтальних погойдувань.

2) Занудьгувавши, мавпа перелізла на кінець жердини і зависла на ньому. Намалюйте можливі положення мавпи і жердини у новому стані рівноваги.

3) Визначте, яку найменшу роботу має виконати мавпа, щоб перебратися назад з кінця жердини на її середину, якщо довжина жердини $s = 3$ м, довжина кожної гумової стрічки до того як мавпа забралася на жердину $l = 2{,}5$ м, відстань між стрічками $d = 2$ м. Коли мавпа всілася посередині жердини, гумові стрічки видовжилися до $L = 3$ м кожна. Маса мавпи $m = 10$ кг. **(9 балів)**

Розв'язання. Припустимо, що рівноважне видовження, коли мавпа на середині жердини, дорівнює x, а жорсткість кожної гумової стрічки k. Тоді $mg = 2kx$, а період вертикальних коливань пружного маятника

$$T_{\text{в}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2k}} = 2\pi\sqrt{\frac{x}{g}}.$$

Період малих горизонтальних коливань маятника довжиною $L = l + x$ (Рис.1)

$$T_{\text{г}} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{l+x}{g}} > 2\pi\sqrt{\frac{x}{g}} = T_{\text{в}}.$$

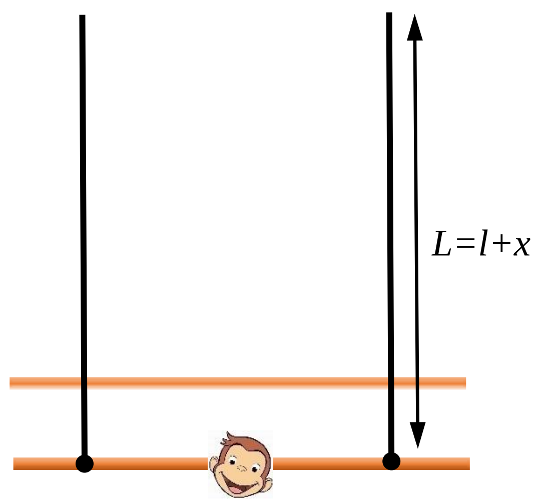


Рис. 1

Як бачимо, $T_{\text{г}} > T_{\text{в}}$. Те, що під час горизонтальних коливань ефективна довжина маятника може додатково збільшуватися, лише підсилює отриману нерівність.

Відповідь на друге питання залежить від видовження x, яке, в свою чергу, залежить від жорсткості k і маси m. Справді, розглянемо два граничні випадки: видовження дуже мале і дуже велике.

За малого видовження x як тільки мавпа почне перелізати через місце закріплення гумової стрічки до жердини, жердина одразу ж повернеться і набуде вертикального положення, якщо тільки це дозволить довжина другої стрічки (рис.2). Далі мавпа просто спуститься на край жердини. Оскільки її утримуватиме одна гумова стрічка, видовження буде удвічі більшим (рис.3).

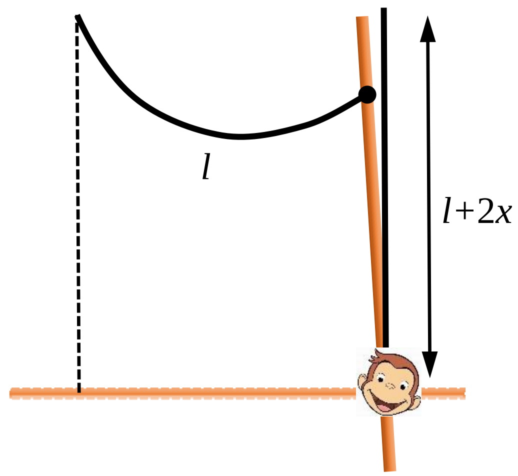


Рис. 2

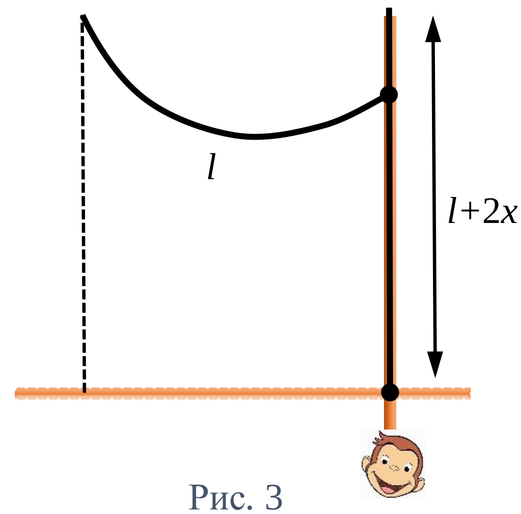


Рис. 3

За великого видовження x розтягнуться обидві стрічки. Але це може відбутися й при невеликих видовженнях, якщо великою буде відстань між стрічками, або стрічки будуть достатньо короткими (форму стелі, яка може обмежувати рух жердини, не обговорюємо). Знайдемо загальну умову, за якої жердина буде вертикальною, одна з ниток нерозтягнутою, а друга максимально видовженою, оскільки всю вагу мавпи прийме на себе (рис. 4). Умова проста – відстань між точками закріплення нерозтягнутої стрічки має бути меншою за її нерозтягнуту довжину l:

$$\sqrt{d^2 + (l + 2x - d)^2} \leq l, \qquad (1)$$

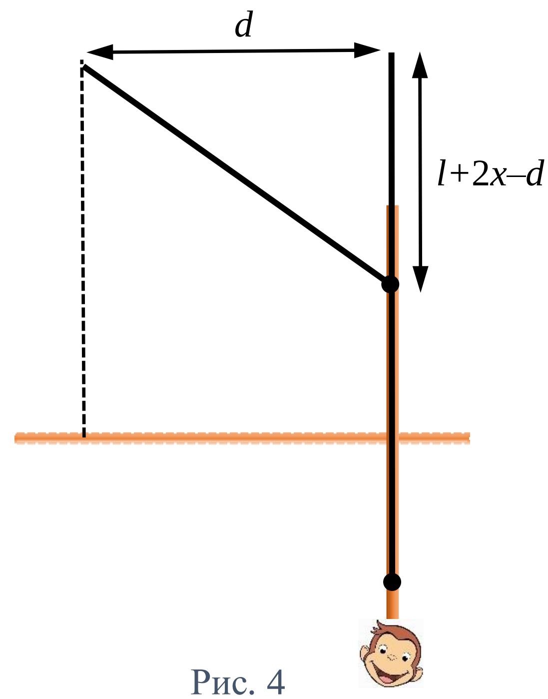


Рис. 4

де $2x = mg/k$. Якщо ж ця умова не виконується, розтягнутими виявляться обидві стрічки, і положення мавпи на жердині набуде неочікуваного вигляду (рис.5). Саме за такого положення лінії дії трьох сил (двох сил натягу $\vec{T}_1$ і $\vec{T}_2$ та сили тяжіння $m\vec{g}$) перетинатимуться в одній точці (точка О на рис.5), що й забезпечить статичну рівновагу відносно поворотів.

Перевіримо виконання умови (1) для випадку «довжина жердини $s = 3$ м, довжина кожної гумової стрічки до того як мавпа забралася на жердину $l = 2{,}5$ м, відстань між стрічками $d = 2$ м. Коли мавпа всілася посередині жердини, гумові стрічки видовжилися до $L = 3$ м кожна. Маса мавпи $m = 10$ кг».

За умовою видовження $x = L - l = 0{,}5$ м, звідси знаходимо і жорсткість стрічки $k = mg/2x$, і перевіряємо умову:

$$\sqrt{d^2 + (l + 2x - d)^2} = 2{,}5 \text{ м},$$

що точно співпадає з довжиною нерозтягнутої гумової стрічки $l = 2{,}5$ м. Отже, маємо випадок, зображений на рис.4. Нехтуючи розмірами мавпи, проводимо через нижній кінець жердини рівень відліку потенціальної енергії мавпи у полі земного тяжіння. Тоді її початкова енергія дорівнюватиме нулю, а кінцева, коли мавпа дістанеться середини жердини, $mg(x + (S - d)/2)$.

Початкова енергія розтягнутої на $2x$ стрічки: $2kx^2$. Кінцева енергія пружної деформації двох розтягнутих на x стрічок: kx^2. Отже, робота мавпи піде на збільшення власної потенціальної енергії, а стрічки їй у цьому допомагатимуть.

$$A = mg(x + (S - d)/2) + kx^2 - 2kx^2 =$$
$$= \frac{1}{2}mg(x + S - d) = 75 \text{ Дж}.$$

В останньому виразі ми скористалися тим, що $k = mg/2x$, а прискорення вільного падіння взяли за 10 м/с^2.

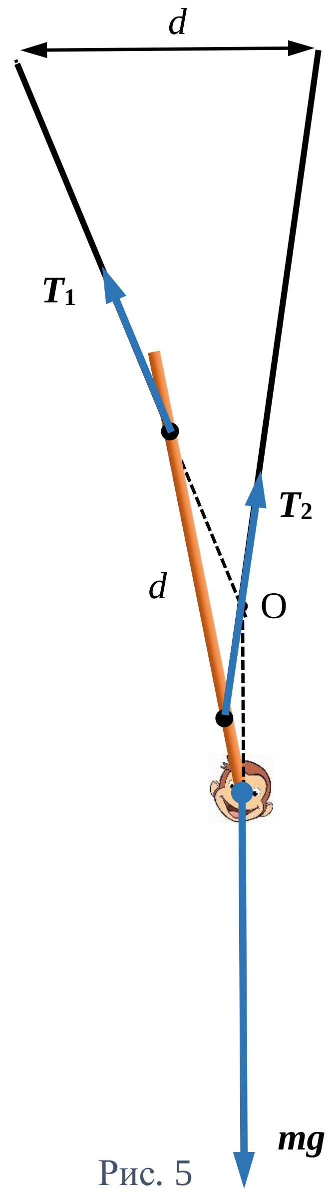
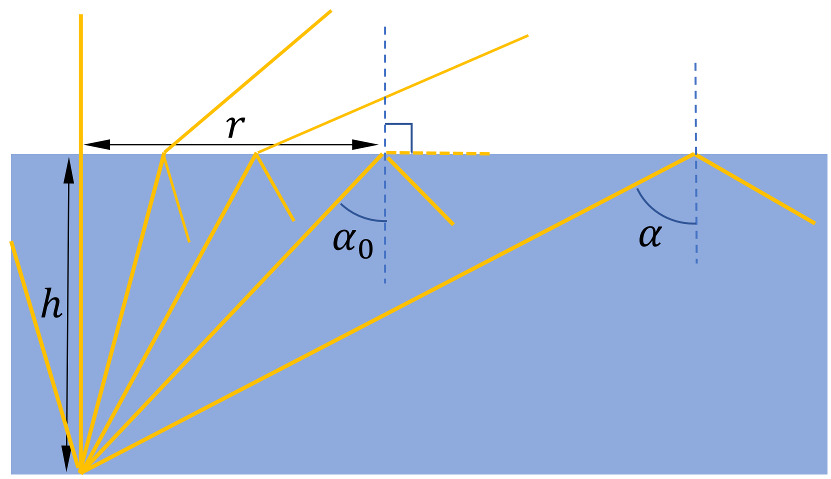


Рис. 5

3. Невидима геометрія. На блакитній горизонтальній поверхні дна басейну глибиною h лежить жовтий опуклий многокутник площею S і периметром p.
1) Знайдіть найменшу площу тонкого плоту, який слід розмістити на поверхні води над многокутником, щоб з повітря цей многокутник не можна було побачити.
2) Проілюструйте на конкретному випадку яку форму матиме такий пліт. Коефіцієнт заломлення води n. Хвиль на поверхні немає. **(8 балів)**



Розв'язання. Точку на дні не видно з повітря, якщо промені від неї падають на поверхню води під кутом α, більшим за граничний кут повного внутрішнього відбиття α_0 (див. Рис. 1). Формально для кута повного внутрішнього відбиття кут заломлення набуває максимально можливого значення 90°:

$$\frac{\sin\alpha_0}{\sin 90°} = \frac{1}{n}.$$

Тоді відстань по горизонталі, яку слід перекрити

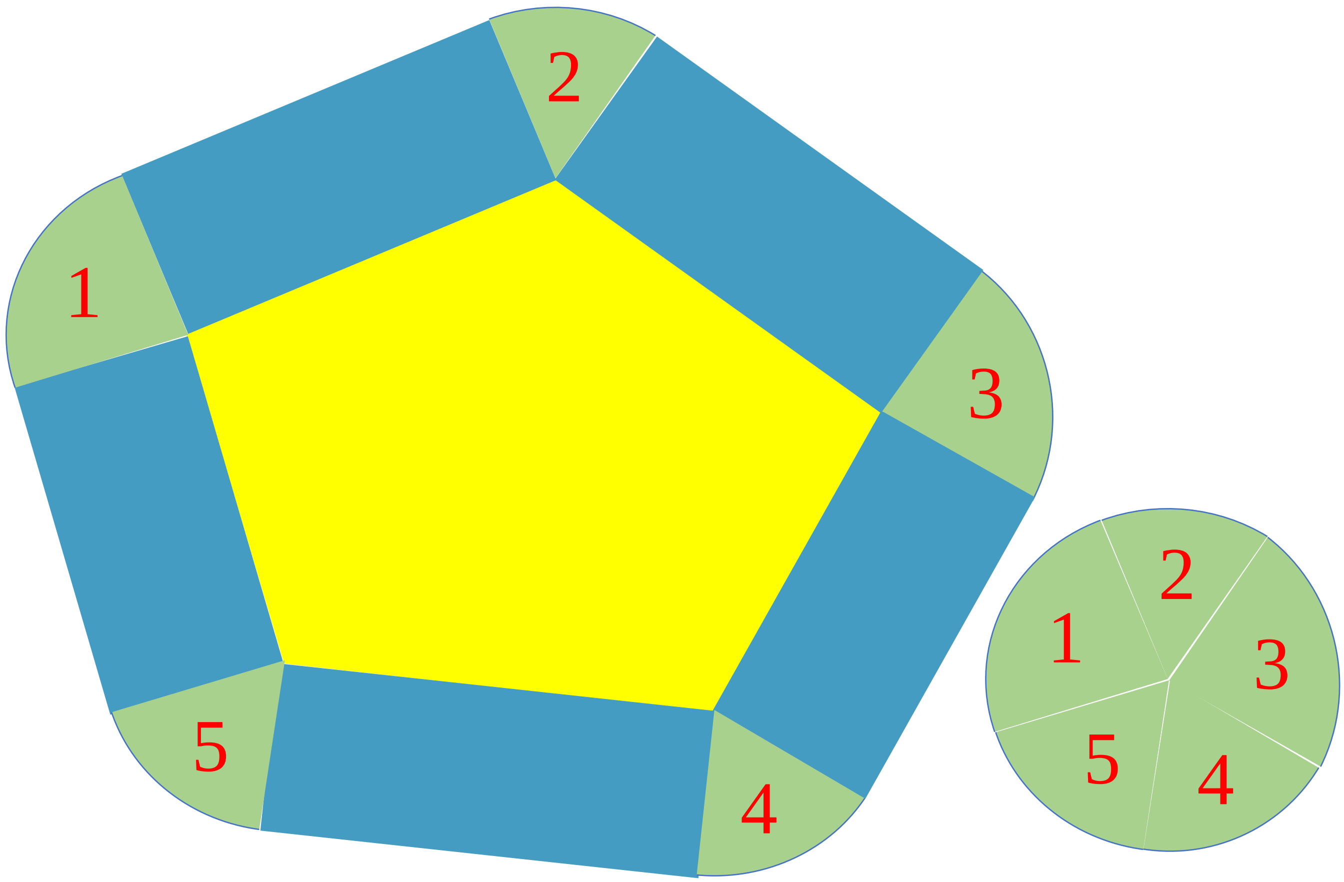
$$r = h\mathrm{tg}\alpha_0 = h\frac{\sin\alpha_0}{\sqrt{1-\sin^2\alpha_0}} = \frac{h}{\sqrt{n^2-1}}.$$

Тобто, границя плоту, що перекриватиме сторону многокутника, буде паралельна стороні, але віддалена від неї по горизонталі на відстань r. Що стосується вершини, то тут на однаковій відстані від неї буде дуга кола радіусом r.
Отже форму плоту мінімальної площі можна отримати, домалювавши сторони многокутника прямокутниками, а їхні зовнішні вершини з'єднавши дугами кола. На Рис. 2, як приклад, зображений жовтий п'ятикутник, як частина плоту, який доповнений прямокутниками і секторами кругів. Контур плоту складається з прямолінійних відрізків, загальна довжина яких дорівнює периметру многокутника p, і дуг кіл. Не складно довести, що для будь-якого многокутника всі сектори кругів у сумі дають повний круг з площею πr^2. Наочно це зображено на Рис.3. А сума площ усіх прямокутників є добутком периметру на відстань r: pr. Отже, площа плоту:

$$S_{\text{пл}} = S + pr + \pi r^2,$$

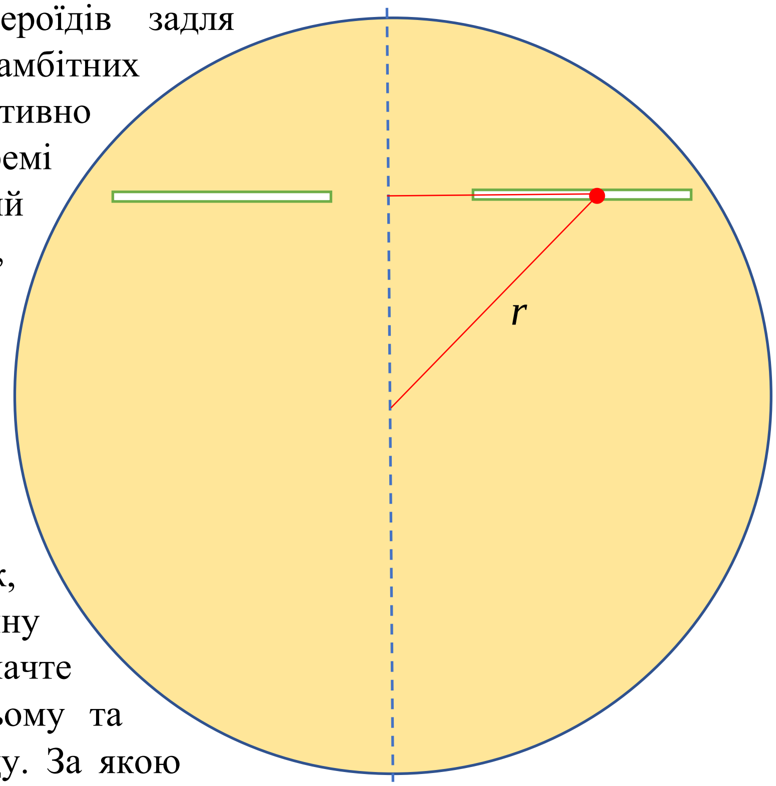
де

$$r = \frac{h}{\sqrt{n^2 - 1}}.$$



Зазначимо, що отриманий результат є вірним для будь-якої опуклої фігури, оскільки навіть її гладкий контур можна уявити як ламану, що складається з нескінченно великої кількості нескінченно малих відрізків, що ніяк не змінює логіку розв’язання нашої задачі для довільного многокутника.

4. Астероїдне місто. Освоєння астероїдів задля корисних копалин – одна з найближчих амбітних комерційних задач, над якою вже активно працюють приватні компанії та навіть окремі країни. Уявіть, що у надрах астероїду, який можна вважати однорідною кулею, вирішили побудувати велике місто. Як зробити поверхню міста зручною, такою, щоб, незважаючи на кривизну астероїду, вона була пласкою з перпендикулярно спрямованою до себе силою тяжіння? Проаналізуйте, чи можна цього досягти на астероїді, що обертається? Якщо так, проведіть розрахунки, намалюйте площину розташування такого міста, визначте прискорення вільного падіння g у ньому та кутову швидкість ω обертання астероїду. За якою траєкторією рухатиметься запущене вздовж цієї поверхні тіло, якщо знехтувати силами тертя та опору?



В аргументації «так, це можливо» чи «ні, не можливо» використайте розрахунки та стандартні позначення: густина речовини астероїду ρ, відстань до центру r, гравітаційна стала G. **(9 балів)**

Підказка: *з міркувань симетрії пропонується розглянути перпендикулярне до осі обертання розташування міста і сили, що діють на деяке тіло в ньому (див. рис.).*

Розв'язання. Скориставшись симетрією, припустимо, що площина міста перпендикулярна до осі обертання. Визначимо прискорення вільного падіння у місті, площина якого розташована на «висоті» h від центру астероїду (див. рис.). Запишемо проекції другого закону Ньютона для матеріальної точки, відстань від якої до центру астероїду r, вважаючи, що у її системі відліку ніякі горизонтальні сили на неї не діють. В інерціальній системі відліку це означатиме, що доцентрове прискорення викликає тільки проекція сили тяжіння на напрям до осі обертання.

$$\begin{cases} m\omega^2 r\sin\alpha = F_{\text{т}}\sin\alpha, \\ N = F_{\text{т}}\cos\alpha, \end{cases}$$

де сила тяжіння (гравітація зовнішніх шарів компенсується)

$$F_{т} = \frac{GM_r m}{r^2} = \frac{4}{3}\pi\rho Gmr.$$

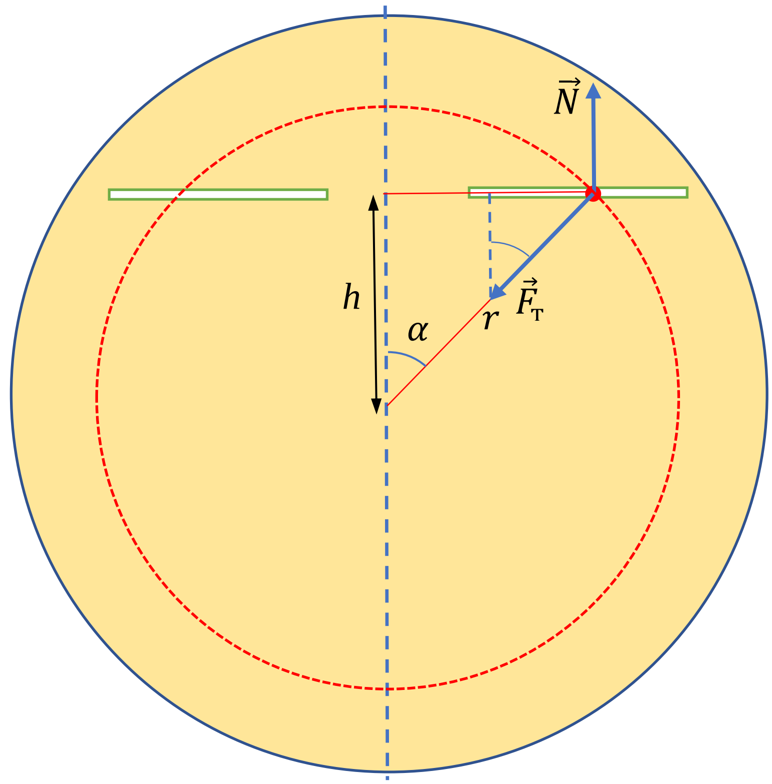
Отже, для того, щоб досягти поставленої мети, слід розкрутити астероїд до кутової швидкості

$$\omega = \sqrt{\frac{4}{3}\pi\rho G}.$$

Прискорення вільного падіння (виходимо з $N = mg$) у такому місті буде всюди однаковим і перпендикулярним до поверхні:

$$g = \omega^2 h.$$

Тобто, можна побудувати міста на різних рівнях з різним значенням прискорення вільного падіння, якщо розкрутити астероїд до визначеної кутової швидкості. Головне, щоб площина міста була перпендикулярною до осі обертання.



У таких містах відцентрова сила інерції повністю компенсується проекцією сили тяжіння. Якщо якомусь тілу надати швидкість вздовж поверхні, на нього у горизонтальному напрямку діятиме лише сила Коріоліса, яка, як відомо, перпендикулярна до швидкості, і тому роботи не виконує, лише змінюючи напрям швидкості. Якщо ж тіло рухається зі сталою швидкістю (нехтуємо силами тертя та опору) під дією спрямованої перепендикулярно до швидкості сталої сили, то будь-які фрагменти траєкторії будуть однаковими. Таку властивість у площині має лише коло. Тіло зі сталою швидкістю рухатиметься вздовж кола і, якщо не зустріне перепон, повернеться назад, або вздовж дуги кола, якщо тілу надати значну швидкість. Такий самий рух спостерігається в однорідному магнітному полі під дією сили Лоренца. Радіуси кіл різні, періоди однакові.

В інерціальній системі відліку аналіз руху складніший. На тіло у горизонтальному напрямку діятиме лише проекція сили тяжіння, що пропорціна відстані до осі обертання. Під дією її складових, як під дією сил Гука, у площині виникнуть взаємоперпендикулярні гармонічні коливання з однаковою частотою. Це відподає руху вздовж еліпсу з центром в точці перетину площини з віссю обертання. Цьому еліпсу з точку зору системи відліку, що обертається разом з містом з кутовою швидкістю $\omega = \sqrt{\frac{4}{3}\pi\rho G}$, відповідають кола.

5. Зіткнення. Свинцеву і пластилінову кульки одночасно кидають з поверхні землі під кутами α_1 і α_2 до горизонту і швидкостями v_{01} і v_{02}, відповідно.

1) Запишіть необхідну умову їхнього зіткнення (у термінах α_1, α_2, v_{01}, v_{02}).

2) За якого відношення маси свинцевої кульки m_1 до маси пластилінової m_2 їхня температура після непружного зіткнення збільшиться на максимальне значення Δt ? Чому воно дорівнюватиме? Питомі теплоємності кульок c_1 і c_2, їхні початкові температури однакові. Опором повітря знехтувати. **(9 балів)**

Розв'язання. Кульки можуть рухатись до зіткнення, як в одній площині, так і в різних, але, якщо вертикальні складові їх початкових швидкостей будуть різними, то кульки весь час руху перебуватимуть на різній висоті, і зіткнення не відбудеться. Отже необхідною умовою, яку можна записати, використовуючи тільки α_1, α_2, v_{01}, v_{02} є рівність їх вертикальних швидкостей.

$$v_{01}\sin\alpha_1 = v_{02}\sin\alpha_2 .$$

Це наочно зрозуміло з точки зору неінерціальної системи відліку, яка одночасно з кульками починає падати з прискоренням вільного падіння. Відносно неї кульки рівномірно переміщуються вздовж прямих. Точка перетину прямих буде на певній відстані від горизонтальної площини початку руху. Цю відстань (у перпендикулярному до площини напряму) за однаковий час мають пройти обидві кульки, що потребує однакового значення їх вертикальних швидкостей.

Припустимо, що у момент зіткнення швидкості кульок $\vec{v}_1$ і $\vec{v}_2$. Запишемо закон збереження імпульсу і зміну кінетичної енергії, яка йде на нагрів кульок.

$$\begin{cases} m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1 + m_2)\vec{v}, \\ (c_1m_1 + c_2m_2)\Delta t = \dfrac{m_1\vec{v}_1^2}{2} + \dfrac{m_2\vec{v}_2^2}{2} - \dfrac{(m_1 + m_2)\vec{v}^2}{2}. \end{cases}$$

З першого рівняння виражаємо $\vec{v}$, підставляємо у друге і після спрощення отримуємо $(c_1m_1 + c_2m_2)\Delta t = \dfrac{m_1m_2(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)^2}{2(m_1 + m_2)}$, звідки

$$\Delta t = \frac{x(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)^2}{2(x+1)(c_1x + c_2)}, \tag{1}$$

де для зручності введено позначення $m_1/m_2 = x$. Аналіз формули (1) на максимум можна провести без використання похідних, наприклад так:

$$\Delta t = \frac{x\left(\vec{v}_1 - \vec{v}_2\right)^2}{2\left(x+1\right)\left(c_1 x + c_2\right)} = \frac{x\left(\vec{v}_1 - \vec{v}_2\right)^2}{2\left(c_1 x^2 + (c_1 + c_2)x + c_2\right)} = \frac{\left(\vec{v}_1 - \vec{v}_2\right)^2 \big/ 2}{c_1 x + (c_1 + c_2) + c_2 / x} =$$

$$= \frac{\left(\vec{v}_1 - \vec{v}_2\right)^2 \big/ 2}{\left(\sqrt{c_1 x} - \sqrt{c_2 / x}\right)^2 + \left(\sqrt{c_1} + \sqrt{c_2}\right)^2}.$$

Найбільше значення Δt буде за найменшого знаменника, тобто, коли повний квадрат $\left(\sqrt{c_1 x} - \sqrt{c_2 / x}\right)^2$ дорівнюватиме нулю. Звідси знаходимо відношення маси свинцевої кульки m_1 до маси пластилінової m_2, за якого збільшення температури найбільше:

$$x = m_1 / m_2 = \sqrt{c_2 / c_1}.$$

Як бачимо, шукане відношення мас не залежить від швидкостей тіл перед зіткненням. Одночасно з цим отримуємо і найбільше Δt:

$$\Delta t = \frac{\left(\vec{v}_1 - \vec{v}_2\right)^2}{2\left(\sqrt{c_1} + \sqrt{c_2}\right)^2}.$$

Зазначимо, що максимальне значення Δt вже залежить від швидкостей перед зіткненням, точніше кажучи, від відносної швидкості тіл $\vec{v}_1 - \vec{v}_2$, яка, враховуючи вираз $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{g}t$ для рівноприскореного руху, дорівнює початковій відносній швидкості:

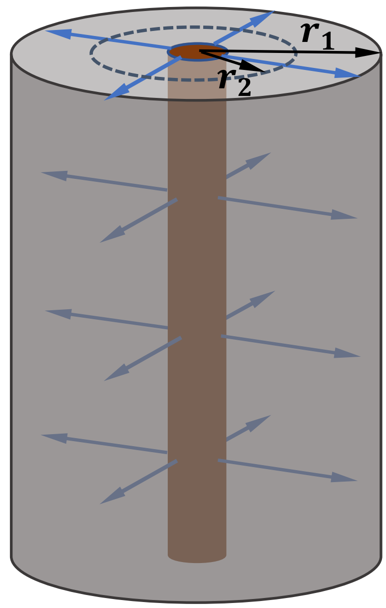
$$\vec{v}_1 - \vec{v}_2 = \vec{v}_{01} + \vec{g}t - \left(\vec{v}_{02} + \vec{g}t\right) = \vec{v}_{01} - \vec{v}_{02}.$$

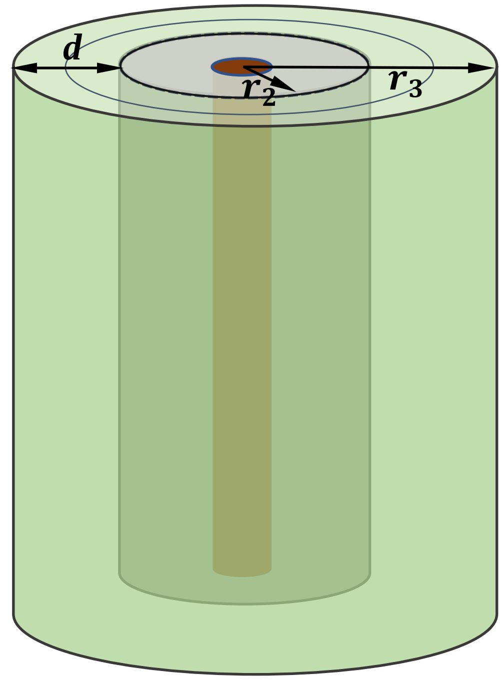
Оскільки вертикальні складові початкових швидкостей однакові, то відносна початкова швидкість буде горизонтальною і матиме максимальне абсолютне значення, коли тіла рухатимуться в одній площині назустріч одне одному. Тобто,

$$\Delta t_{\max} = \frac{\left(v_{01}\cos\alpha_1 + v_{02}\cos\alpha_2\right)^2}{2\left(\sqrt{c_1} + \sqrt{c_2}\right)^2}.$$

Зазначимо, що величини, які входять до останньої формули, не довільні. На них накладені обмеження, що забезпечують можливість зіткнення, а саме: $v_{01}\sin\alpha_1 = v_{02}\sin\alpha_2$ та інше, аналогічне йому, якщо спроектувати горизонтальні складові швидкостей на перпендикуляр до лінії, що з'єднує початкові точки і дорівняти. Звісно, що є ще одне обмеження – це зіткнення тіл у повітрі. Оскільки геометрія розташування початкових точок та рельєф не задані, останні обмеження записати у термінах умови задачі не можна. Зазначимо також, що випадок не прямого не центрального зіткнення, після якого тіло з двох кульок обертатиметься, зменшить частину енергії, яка піде на нагрів, що не відповідає умові задачі.

6. Циліндричний опір. У технологічному процесі провідник вкривають захисною циліндричною оболонкою і занурюють у розплавлений метал. Струми розходяться від провідника крізь оболонку у радіальних напрямах (рис.1). За нормою захисна циліндрична оболонка повинна мати зовнішній радіус $r_1 = 10$ см, але з часом, знаходячись в агресивному середовищі, вона зменшується. Коли її зовнішній радіус суттєво зменшився, циліндр відшліфували до $r_2 = 5$ см і вкрили поверх шаром товщиною d більш стійкої речовини з удвічі меншим питомим опором (рис.2).





1) Виходячи з міркувань розмірності та геометрії, запропонуйте загальну формулу залежності опору R такої циліндричної оболонки від її питомого опору ρ та геометричних розмірів: висоти h, внутрішнього та зовнішнього радіусів r_0 та r.

2) Розрахуйте товщину d нової оболонки, за якої загальний опір відновленого циліндру (рис. 2) буде таким самим, як у нового нормативного (рис.1). Опором центрального мідного стержня знехтуйте. **(8 балів)**

Розв'язання. Спробуємо з'ясувати, як може залежати опір провідника між двома циліндричними поверхнями при радіальному розподілі струму. Відомо, що для однорідного провідника, площа перерізу S якого не змінюється і перпендикулярна його довжині l , опір: $R = \rho\frac{l}{S}$. Якщо внутрішня циліндрична поверхня має радіус r_0, зовнішня – радіус r, а висота h, можна записати наближену формулу, взявши за довжину провідника l – товщину шару в напрямку проходження струму $l = r - r_0$, а за площу перерізу S – добуток висоти h на деяку середню довжину кола: $2\pi r_c h$. За середній радіус r_c перпендикулярного до напрямку струму перерізу, оціночно можна взяти середнє арифметичне внутрішнього та зовнішнього радіусів, $r_c = (r_0 + r)/2$. Тоді

$$R = \rho\frac{l}{2\pi r_c h} = \frac{\rho}{\pi h}\cdot\frac{r - r_0}{r + r_0} = \frac{\rho}{\pi h}\cdot\frac{r/r_0 - 1}{r/r_0 + 1}. \quad (1)$$

З аналізу розмірностей і геометрії циліндру випливає, що у загальному випадку опір має бути пропорційний питомому опору ρ і обернено пропорційним висоті h, зі збільшенням якої збільшується площа перерізу. Тоді радіуси входитимуть у вигляді безрозмірного відношення. Тобто

$$R = \frac{\rho}{h} f(r/r_0). \tag{2}$$

Рівняння (1) задовільняє (2), хоча і є приблизним для розрахунків у випадку, коли не вдається отримати точну відповідь.

Для того, щоб опір не змінився, необхідно, щоб опір нової захисної оболонки від r_2 до r_3 дорівнював опору тієї частини старої оболонки від r_2 до r_1, що була вилучена.

$$\frac{\rho}{2h} f(r_3/r_2) = \frac{\rho}{h} f(r_1/r_2)$$

Але ж при послідовному з'єднанні опори додаються, тому опір нової оболонки можна уявити як два послідовних від r_2 до r_1 та від r_1 до r_3 (див. рис.2):

$$\frac{\rho}{2h} f(r_1/r_2) + \frac{\rho}{2h} f(r_3/r_1) = \frac{\rho}{h} f(r_1/r_2).$$

Скорочуючи, знаходимо: $f(r_3/r_1) = f(r_1/r_2)$. Отже, для нашої монотонної функції це означає рівність аргументів: $r_3/r_1 = r_1/r_2$, звідки:

$$r_3 = \frac{r_1^2}{r_2} = 20 \text{ см}.$$

Тоді товщина нової оболонки $d = r_3 - r_2 = 15$ см.

Радіус циліндру зменшився удвічі, а для відновлення опору з використанням удвічі менш провідною речовини знадобився утричі товщий її шар, замість відпрацьованого. Наближена формула дає досить велику похибку. .

Наприкінці зауважимо, що функція $f(x)$ з точністю до множника є натуральним логарифмом, а опір між двома циліндричними поверхнями визначається за формулою:

$$R = \frac{\rho}{2\pi h} \ln(r/r_0),$$

без якої ми обійшлись. Але все одно вчіть математику!

7. Майже експеримент. Для визначення атмосферного тиску відкриту з обох кінців скляну трубку занурюють у воду у вертикальному положенні після чого верхній кінець перекривають і виймають трубку з води (вода частково залишається у трубці).

1) На скільки слід занурити нижній кінець у воду, щоб з найменшою відносною похибкою визначити атмосферний тиск?

2) Опишіть, як слід проводити вимірювання, та спрогнозуйте найменше значення цієї похибки за нормальних зовнішніх умов.

Вимірювання проводяться лінійкою з міліметровими поділками. Довжина трубки 1 м. Капілярними явищами для цієї трубки можна знехтувати. **(9 балів)**

Розв'язання. Позначимо через X глибину занурення нижнього кінця трубки. Тоді довжина стовпчика повітря у трубці при атмосферному тиску P_0 буде $L-X$. Після перекриття верхнього кінця і підняття трубки над водою, рівень води в ній зменшиться до деякого значення Y, тобто, довжина стовпчика повітря стане $L-Y$, а тиск $P = P_0 - \rho g Y$ (Рис.1). Дослід проводимо не поспішаючи, отже процес можна вважати ізотермічним і скористатися $P_0 V_0 = PV$, що в нашому випадку набуває вигляду $P_0(L-X) = (P_0 - \rho g Y)(L-Y)$, звідки знаходимо

$$P_0 = \frac{\rho g Y (L-Y)}{X-Y}. \qquad (1)$$

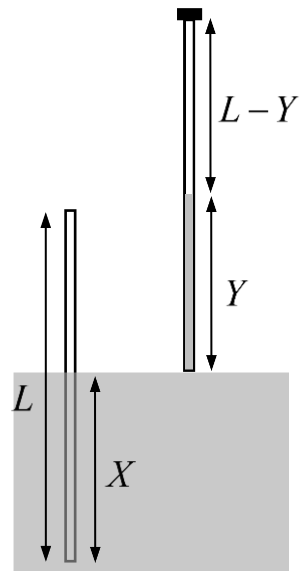


Рис.1

Вважаємо довжину L трубки, а також довідкові дані (густина води і прискорення вільного падіння) відомими точно. Відносна похибка визначення атмосферного тиску:

$$\varepsilon = \frac{\Delta P_0}{P_0} = \frac{\Delta Y}{Y} + \frac{\Delta(L-Y)}{L-Y} + \frac{\Delta(X-Y)}{X-Y} = \frac{\Delta Y}{Y} + \frac{\Delta Y}{L-Y} + \frac{\Delta(X-Y)}{X-Y}.$$

Для того, щоб мінімізувати ε, слід зменшити чисельники і збільшити знаменники. У чисельниках стоять інструментальні похибки: $\Delta Y = 0{,}5$ мм і $\Delta(X-Y) = \Delta X + \Delta Y = 1$ мм, якщо міряти X та Y окремо. Однак ми можемо безпосередньо виміряти зміну висоти стовпчика $x = X - Y$, і тоді $\Delta(X-Y) = \Delta x = 0{,}5$ мм – відносна похибка останнього доданку в ε зменшиться вдвічі!

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{Y} + \frac{1}{L-Y} + \frac{1}{x}\right) \text{ мм} = \frac{1}{2}\left(\frac{L}{Y(L-Y)} + \frac{1}{x}\right) \text{ мм}. \qquad (2)$$

Саме останній доданок дає найбільший внесок в інструментальну похибку, оскільки вимірюється мала величина (атмосферний тиск значно перевищує гідростатичний). Звісно, x залежить від X, а, отже, і від Y. Тому для того, щоб остаточно мінімізувати ε, виразимо з формули (1) $x = \dfrac{\rho g Y(L-Y)}{P_0}$ і підставимо в(2):

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\frac{L+P_0/\rho g}{Y(L-Y)} \text{ мм.}$$

Мінімального значення ε набуде за максимального значення знаменника. Беремо похідну, або виділяємо повний квадрат і знаходимо: $Y = L/2$.

Тоді, скориставшись знанням приблизного значення атмосферного тиску, густини води і прискорення вільного падіння, знаходимо:

$$x = \frac{\rho g}{P_0}\frac{L^2}{4} \approx 2{,}5 \text{ см},\ X = Y + x = 52{,}5 \text{ см},\ \varepsilon = \frac{1}{2}\frac{L+P_0/\rho g}{Y(L-Y)} \text{ мм} = 2{,}2\%.$$

Отже, трубку слід занурити на 52,5 см, що після її підняття очікувано дає стовпчик довжиною 50 см в межах абсолютної похибки 0,5 мм.

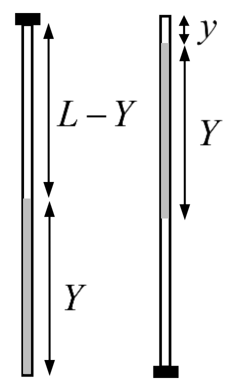


Рис.2

Існує **інший, більш точний, метод** визначення атмосферного тиску, який дозволяє майже вдвічі збільшити зміщення стовпчика. Після того, як трубку витягли з води, слід виміряти Y, після чого її перевернути і виміряти зміщення стовпчика y (див. Рис.2). Знову для ізотермічного процесу записуємо:

$$(P_0 - \rho g Y)(L-Y) = (P_0 + \rho g Y)(L - Y - y),$$

Звідки знаходимо

$$P_0 = \rho g \frac{Y(2L-2Y-y)}{y}. \qquad (3)$$

Відносна похибка

$$\varepsilon = \frac{\Delta P_0}{P_0} = \frac{\Delta Y}{Y} + \frac{\Delta(2L-2Y-y)}{2L-2Y-y} + \frac{\Delta y}{y}.$$

Знову аналізуємо чисельник $\Delta(2L-2Y-y)$. Якщо міряти тільки Y і y, маємо $\Delta(2L-2Y-y) = 2\Delta Y + \Delta y = 1{,}5$ìì. Якщо ж, наприклад, додатково міряти $l = Y + y$ разом, маємо $\Delta(2L-2Y-y) = \Delta Y + \Delta(Y+y) = \Delta Y + \Delta l = 1$ мм, виграш у 1,5 рази. Таким чином, маємо

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{Y} + \frac{2}{2L-2Y-y} + \frac{1}{y}\right) \text{мм.} \qquad (4)$$

Виразимо з (3) y і підставимо у (4):

$$\varepsilon = \frac{2Y^2 + aLY + a(a+2)L^2}{4aLY(L-Y)} \text{мм,}$$

де $a = P_0/\rho g L \approx 10$. Візьмемо похідну, прирівняємо до нуля і отримаємо квадратне рівняння (можна обійтися без похідної, виділивши після деяких перетворень повний квадрат):

$$Y^2 + 2aLY - aL^2 = 0.$$

Фізичним умовам задовольняє $Y = L\left(\sqrt{a + a^2} - a\right) \approx 48{,}8$ см, звідки з формули (1) $X = \frac{Y(L-Y)}{aL} + Y \approx 51{,}3$ см, що на 1,2 см менше, ніж у попередньому випадку. Відносна похибка $\varepsilon \approx 1{,}254\% \approx 1{,}3\%$.

Отже, для максимальної точності слід занурити трубку на 51,3 см, потім витягти, заміряти висоту стовпчика води 48,8 см, далі перевернути трубку і заміряти як зміщення стовпчика y, так і довжину або частини с повітрям, або водяного стовпчика зі зміщенням l. Звісно, реальна похибка буде дещо більшою за рахунок інших похибок.

Зазначимо, що такі ж самі відповіді для X можна було отримати, не мінімізуючи ε, а шукаючи максимальні зміщення (це можна довести за допомогою матаналізу).

Додаток

(як знайти екстремум у задачі «Майже експеримент» без похідної)

1-й випадок

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\frac{L + P_0/\rho g}{Y(L-Y)} \text{ мм}$$

$\varepsilon \to min,$ коли $Y(L-Y) \to max$

$$Y(L-Y) = L^2/4 - (L/2 - Y)^2$$

Оскільки мінімальне значення квадрату 0, маємо $Y = L/2$ і

$$\varepsilon_{min} = \frac{1}{2}\frac{L + P_0/\rho g}{L^2/4} \text{ мм.}$$

2-й випадок

$$\varepsilon = \frac{2Y^2 + aLY + a(a+2)L^2}{4aLY(L-Y)} \text{ мм}$$

Треба мінімізувати

$$F(Y) = \frac{2Y^2 + aLY + a(a+2)L^2}{Y(L-Y)} = \frac{2(Y^2 - LY) + 2LY + aLY + a(a+2)L^2}{Y(L-Y)}$$
$$= -2 + (a+2)L\frac{Y + aL}{LY - Y^2} = -2 + \frac{(a+2)L}{\frac{LY - Y^2}{Y + aL}}$$

$F(Y) \to min$, коли
$$f(Y) = \frac{LY - Y^2}{Y + aL} \to max$$

Для зручності позначимо $z = Y + aL$. Тоді
$$f(z) = \frac{L(z - aL) - (z - aL)^2}{z} = (1 + 2a)L - \left(z + \frac{(a + a^2)L^2}{z}\right)$$
$$= (1 + 2a)L - 2\sqrt{a + a^2}L - \left(\sqrt{z} - \sqrt{\frac{(a + a^2)}{z}}L\right)^2.$$

ми досягнемо поставленої мети, коли повний квадрат в останньому виразі набуде свого мінімального значення 0 ($z = \sqrt{a + a^2}L$). Тоді
$$f = (1 + 2a)L - 2\sqrt{a + a^2}L = \left(\sqrt{1+a} - \sqrt{a}\right)^2 L$$
і
$$\varepsilon = \frac{1}{4aL}\left(-2 + \frac{(a+2)}{\left(\sqrt{1+a} - \sqrt{a}\right)^2}\right) \text{мм.}$$

Значення висоти водяного стовпчика $Y = z - aL = (\sqrt{a + a^2} - a)L$

Задачі запропонували:
1 – Карасик В.Д., 2-7 – Орлянський О.Ю.
В обговоренні й покращенні умов та розв’язків приймали участь члени журі 10 класу:
Ненашев І.Ю., Даценко І.П., Мінаєв П.Є., Триліс О.В., Зеленін С.В., Катц А.М., Фесенко І.І.