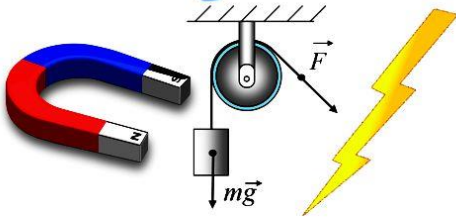


Physics



Другий тур.

11 клас.

Умови та розв'язки.

Задачі запропонували: №12 Пашко

М.І., Маслечко А.М., №1-11, 13-19 Пашко

М.І., Олійник А.О.



1. Археологи знайшли доісторичний дерев'яний артефакт і вирішили оцінити його вік. Уявіть, що для цієї задачі вони застосували радіо вуглецевий метод. Через наявність космічної та земної радіації серед стабільних атомів вуглецю-12 завжди є дуже невелика кількість радіоактивних атомів вуглецю-14. Коли дерево зрубують, то накопичення у ньому вуглецю-14 припиняється. Активність 1 г живого дерева дорівнює 800 розпадів на годину. Період напіврозпаду вуглецю-14 дорівнює приблизно 5700 років. Оцініть вік артефакту, якщо виміряна археологами активність знизилась у 8 разів. Відповідь надайте у цілій кількості років.

Вказівки: Беручи похідну від закону радіоактивного розпаду можна отримати

активність: $A = N_0 \frac{\ln 2}{T_{1/2}} 2^{-\frac{t}{T_{1/2}}}$. В умовах задачі дане відношення активностей вуглецю-14.

Логарифмуючи це відношення можна отримати час, який вуглець розпадався: $t = T_{1/2} \frac{\ln 8}{\ln 2}$.

Відповідь. 17100 років.

2. Космічний корабель маси M починає прискорюватися зі сталим прискоренням a значно подалі від інших тіл. Визначити, яку силу тяги розвиває двигун корабля у той момент, коли його швидкість менша швидкості світла у вакуумі у $\sqrt{2}$ разів? Швидкість та прискорення корабля завжди залишаються спрямованими в одному напрямку.

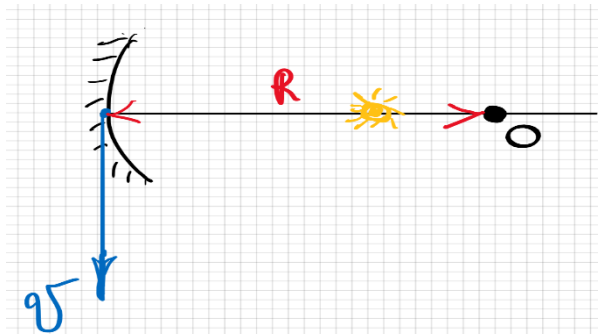
Вказівки: Застосуємо для корабля другий закон Ньютона в імпульсній формі

$F = dp/dt$. Далі враховуємо, що імпульс тіла, яке рухається зі швидкістю, близькою до швидкості світла у вакуумі дорівнює: $p = \frac{MV}{\sqrt{(1-v^2/c^2)}}$, беремо похідну від цього

виразу і отримуємо $F = \frac{Ma}{\sqrt{(1-v^2/c^2)^3}}$. Після чого підставляємо значення швидкості і отримуємо відповідь.

$$\text{Відповідь } F = \frac{Ma}{\sqrt{(1-v^2/c^2)^3}} = \sqrt{8}Ma$$

3. На головній оптичній вісі маленького увігнутого дзеркала із великим радіусом кривизни R знаходиться невелике за розмірами джерело світла на відстані $3R/4$ від дзеркала. Знайти відношення швидкості зображення до швидкості дзеркала в момент часу, коли дзеркало почало рухатись перпендикулярно до головної оптичної вісі зі швидкістю V .



Вказівки: Спочатку застосуємо формулу сферичного дзеркала ($2/R = 1/d + 1/f$) і знайдемо положення зображення джерела світла: $3R/2$. Якщо перейти у систему відліку, що пов'язана з дзеркалом, то в ній джерело почало рухатися вгору зі швидкістю V . Виходячи з подібності трикутників, отримуємо, що зображення в цій системі починає рухатися зі швидкістю $2V$ вниз. Тоді відносно землі його швидкість буде дорівнювати $3V$.

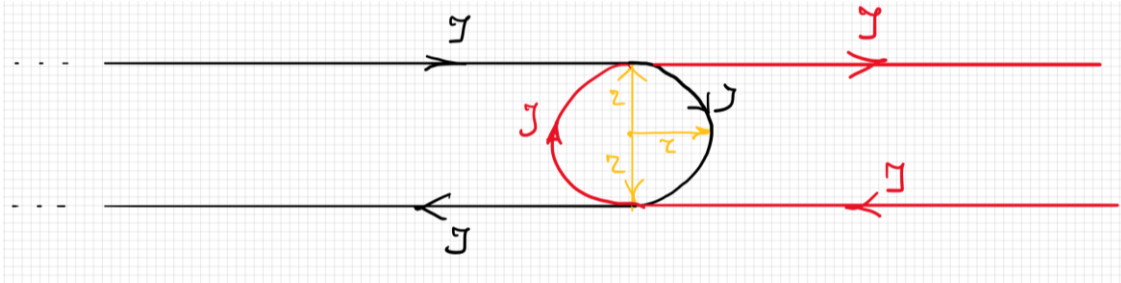
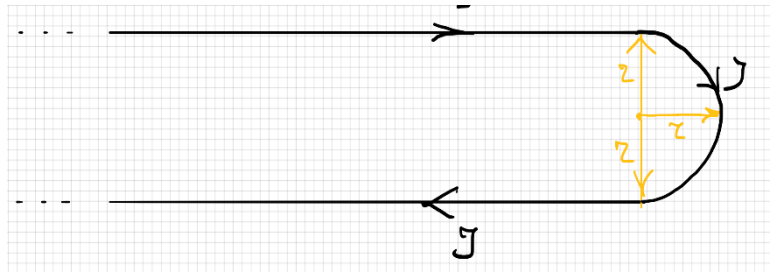
Відповідь 3.

4. Рідкий гелій-4 при температурі 4 К знаходиться в закритій посудині. Об'єм, який займають пари гелію, дорівнює 1 л. Ці пари швидко відкачують з посудини, після чого температура гелію падає на 0.01 К. Знайдіть тиск насичених парів гелію, вважаючи, що він майже не змінюється при пониженні температури. Питома теплоємність гелію $c = 5$ кДж/(кг*К), теплота випаровування $L = 20$ кДж/кг, маса гелію в рідкому стані до відкачування парів $m = 200$ г.

Вказівки: Охолодження гелію відбувається за рахунок випаровування. Якщо ми відкачали всі насичені пари, то об'єм над гелієм дуже швидко заповниться новими парами при тому самому тиску насичених парів, адже температура змінюється дуже мало. Відповідь отримуємо записавши закон збереження енергії при охолодженні гелію ($L\Delta m = c m \Delta T$) за рахунок випаровування та закон Менделєєва-Клапейрона для насиченого пару ($pV = \frac{\Delta m}{\mu} RT$). В результаті отримуємо: $p = \frac{cmRT\Delta T}{LV\mu}$.

Відповідь: 4,16 кПа.

5. **Металевий дріт зі струмом I має форму як показано на малюнку. Який вираз для магнітного поля в центрі напівкільця є правильним?**



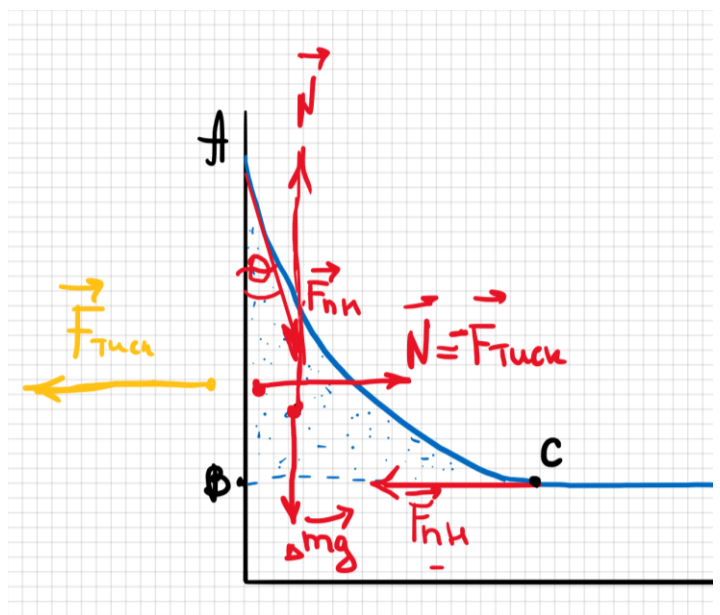
Вказівки: Добудуємо до стартового дроту, що зображений чорним кольором, ще один червоний (див. рис.) Цілком зрозуміло, що завдяки цьому індукція магнітного поля в нашій точці подвоїться. Але зараз її буде легко розрахувати за принципом суперпозиції, як суму спрямованих в один бік магнітних полів двох нескінченних прямих дротів та колового струму. Тобто:

$$B = \frac{1}{2} (2B_{\text{прям}} + B_{\text{кол}}) = \frac{1}{2} \left(2 \frac{\mu_0 I}{2\pi r} + \frac{\mu_0 I}{2r} \right) = \mu_0 i (2 + \pi) / (4\pi r)$$

Відповідь: $\mu_0 i (2 + \pi) / (4\pi r)$

6. **У велику посудину налили рідину густини ρ та коефіцієнтом поверхневого натягу σ . Визначити, на скільки рідина підіймається по стінці посудини в наслідок змочування, якщо кут змочування дорівнює 30 градусів? Зрозуміло, що відповідь має вигляд $J \cdot (\sigma / \rho g)^{1/2}$, де J – безрозмірний коефіцієнт. У відповіді оберіть значення цього коефіцієнту.**

Вказівки: Розглянемо порцію рідини, що обмежена поверхнею рідини, стінкою та горизонтальним перерізом (див. рис.). З умови рівноваги на горизонтальну вісь: $N + F_{\text{пн}} \sin \theta = F_{\text{пн}}$,



$$\frac{\rho g h^2 d}{2} = \sigma d (1 - \sin \theta).$$

$$h = \sqrt{\frac{2\sigma}{\rho g}} (1 - \sin \theta)$$

Відповідь: 1.

7. Горизонтальний циліндричний посуд довжиною L заповнений насиченою водяною парою у кількості ν молів і розділений навпіл вертикальним важким поршнем маси M . Посудину підтримують при постійній температурі T . Визначити період малих коливань поршня. Тертям поршня о посудину знехтувати. З розмірності зрозуміло, що відповідь має вигляд: $J \cdot \pi \cdot L \cdot (M/\nu RT)^{0.5}$, де J -безрозмірний коефіцієнт. Знайти значення цього коефіцієнту.

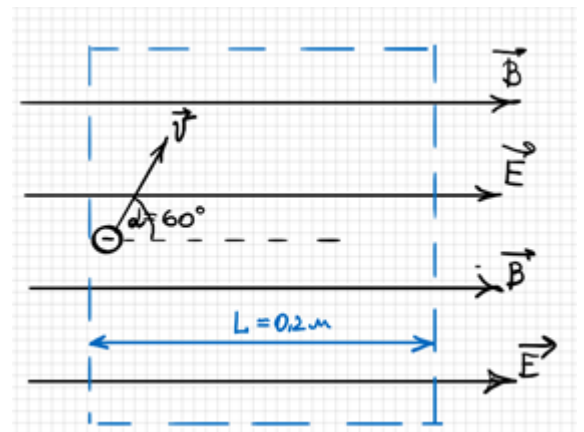
Вказівки: Зсунемо поршень на невелику відстань x з положення рівноваги і розглянемо квазіупружні коливання, що виникнуть після цього. З того боку, де насичену пару стискають, тиск не змінюється, так як пара залишається насиченою. З іншого боку поршня, пара стає ненасиченою і її тиск зменшується.

Повертаюча сила при цьому дорівнює: $F = S \left(p_{\text{нп}} - p_{\text{нп}} \frac{L/2}{L/2+x} \right) \approx \frac{2p_{\text{нп}}S}{L} x = \frac{2\nu RT}{L^2} x$

$$\text{Тоді період коливань: } T = \sqrt{2\pi L} \sqrt{\frac{M}{\nu RT}}$$

Відповідь: $\sqrt{2}$

8. Електрон рухається у просторі, у якому індукція магнітного поля $B=30$ мкТл, співпадає за напрямком з напруженістю електричного поля $E=1$ мВ/м. Прямокутник на рисунку відображає поперечний переріз області, в яку цей електрон потрапляє зі швидкістю 12.56 км/с під кутом 60° до напрямку силових ліній. Довжина області магнітного поля складає 0.2 м. Знайдіть число обертів, зроблених електроном за час знаходження в області спостереження. Маса електрона $9 \cdot 10^{-31}$ кг, заряд $1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл.



Вказівки: Потрапивши у «область» електрон продовжує рухатися по спіралі, шаг якої поступово зменшується внаслідок гальмування.

$$\text{Час гальмування: } t = \frac{mV \cos \alpha}{qE}$$

$$\text{Період обертання } T = 2\pi \frac{m}{qB}$$

$$\text{Кількість обертів до зупинки: } N = \frac{t}{T} = \frac{VB \cos \alpha}{2\pi E} = 30$$

Внаслідок подальшого повернення ліворуч повна кількість обертів буде вдвічі більшою.

Відстань, яку пройшов електрон вздовж силових ліній до зупинки:

$$S = \frac{m(V \cos \alpha)^2}{2qE} = 11.25 \text{ см.}$$

Бачимо, що за час гальмування електрон не залишає «область»

Відповідь: 60.

9. Коефіцієнт відновлення між тенісним м'ячиком і ракеткою визначається як $\gamma = v_2/v_1$, де v_1 -швидкість м'яча, який підлітає, v_2 - швидкість м'яча після відскоку від нерухомої ракетки.

Тенісний м'яч падає з висоти H на нерухому ракетку і, після відбиття піднімається на висоту $0.81 H$. Тенісист використовує ракетку, щоб вдарити по тенісному м'ячу, який наближається зі швидкістю 40 м/с і рухає її зі швидкістю 20 м/с назустріч м'ячу. Яка швидкість м'яча після удару в м/с? (Вважайте, що маса ракетки набагато більше, ніж маса м'яча).

Вказівки: Спочатку застосуємо закон збереження енергії для випадку нерухомої ракетки та отримаємо значення коефіцієнта відновлення $0,9$. Далі зручно перейти у систему відліку, що пов'язана з рухомою ракеткою. В цій системі м'яч наближається до неї зі швидкістю 60 м/с, а відлітає з 54 м/с. Для отримання відповіді повертаємося в нерухому систему відліку і отримуємо 74 м/с.

Відповідь: 74.

10. Плоска хвиля нормально падає на чотири рівномірно рознесені, однакові вузькі щілини S_1, S_2, S_3 і S_4 . Точка X знаходиться на майже однаковій дуже великій відстані від щілин. Коли відкриті тільки щілини S_2 і S_3 , інтенсивність хвилі в точці X досягає максимуму A . Коли всі чотири щілини відкриті, інтенсивність в точці X дорівнює:



Вказівки: Нехай кожна щілина є джерелом хвилі з амплітудою E . За принципом суперпозиції у точці X у першому випадку амплітуда коливань буде $2E$. Так як інтенсивність пропорційна квадрату амплітуди, то A пропорційна $4E^2$.

У другому випадку амплітуда буде майже $4E$ (за умовою задачі відстань до т.Х дуже велика). Тоді інтенсивність пропорційна $16E^2$, тобто $4A$.

Відповідь: $4A$.

11. У акваріумі з водою (коефіцієнт заломлення $n=4/3$) нерухомо завмерла рибка. Вона дивиться вертикально вгору на лампу, що висить над нею в повітрі і випромінює монохроматичне світло на довжині хвилі 500 нм. Визначити, на скільки Гц зміниться частота світла, який сприймає рибка, якщо підвищувати рівень води в акваріумі зі швидкістю $V=1,5$ мм/с?

Вказівки: Внаслідок збільшення рівня води у посудині оптичний шлях збільшиться на:

$$\Delta = n * dh - 1 * dh = dh(n - 1) \text{ (у воді зростає у повітрі зменшується).}$$

Тоді
$$\frac{d\Delta}{dt} = (n - 1) \frac{dh}{dt}$$

Це рівносильно віддаленню джерела світла від спостерігача(риби) зі швидкістю

$$V = (n - 1) \frac{dh}{dt}$$

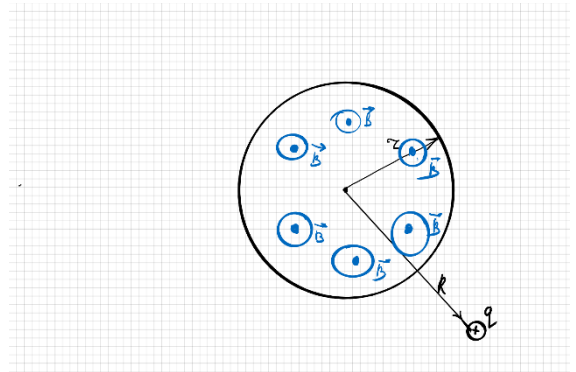
Тоді зміщення частоти (ефект Доплера нехтуючи релятивістськими ефектами):

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{V}{c} = \frac{(n - 1)}{c} \frac{dh}{dt}$$

$$\Delta\nu = \frac{(n - 1)}{\lambda} V$$

Відповідь: 1000 Гц.

12. На малюнку показана область радіусу r , де може бути ввімкнуте магнітне поле індукції деякого значення B_0 , перпендикулярне до площини малюнку. На відстані $R > r$ від центру цієї області розташований протон ($1,6 \cdot 10^{-27}$ кг, $1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл). Якщо дуже швидко ввімкнути таке однорідне магнітне поле, то протон отримає швидкість $V = 2 \cdot 10^6$ м/с.



Якщо замість частинки розташувати навколо магнітного поля тонке металеве кільце радіусу R і вимкнути поле за законом $B = B_0(1 - at)$, де $a = 0,5$ 1/с, то кільце нагріється. Знайти зміну температури кільця внаслідок вимикання поля. Питома теплоємність матеріалу кільця 100 Дж/кг*К, густина 4000 кг/м³ та питомий опір $5 \cdot 10^{-10}$ Ом*м.

Вказівки: Спочатку застосуємо закон Фарадея для електромагнітної індукції і знайдемо напруженість електричного поля на відстані R від центру області магнітного поля під час швидкої появи магнітного поля. $E = \frac{dB R^2}{2R dt}$

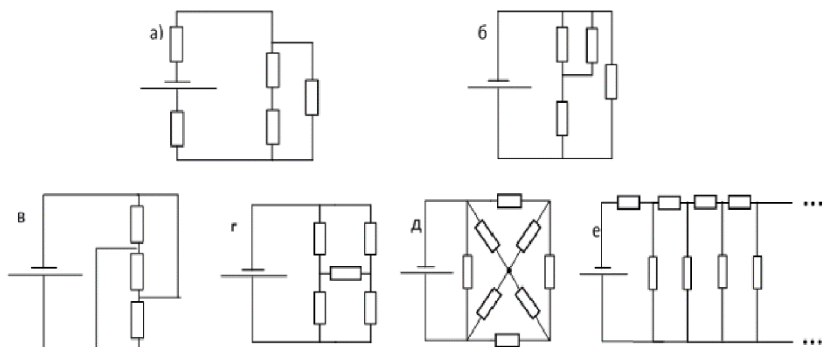
Внаслідок цього протон майже миттєво набуває швидкості, яку можна розрахувати, наприклад, за другим законом Ньютона в імпульсній формі: $qEdt = m dV$

Це дозволить нам отримати величину B_0 : $B_0 = \frac{2RMV}{qr^2}$.

Далі розглянемо процес вимкнення магнітного поля. Індукційний струм, що виникає у кільці при цьому, приводить до збільшення внутрішньої енергії кільця. Застосовуючи закон збереження енергії, закон Фарадея та Джоуля-Ленца, нескладно отримати вираз для збільшення температури кільця: $\Delta T = \frac{a}{\rho_{\text{ел}} c} \left(\frac{VM}{q} \right)^2 = 1$ К.

Відповідь: 1 К.

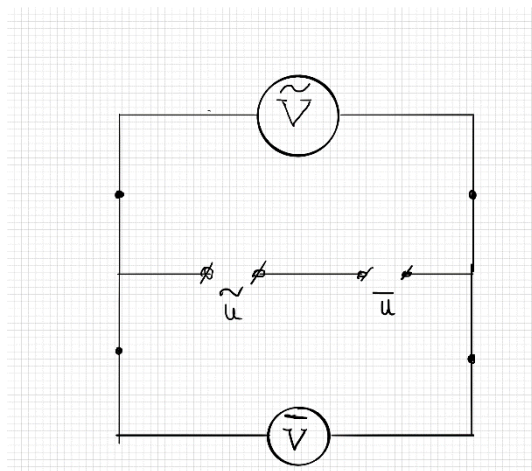
13. На малюнках запропоновані схеми з'єднання однакових резисторів опором R. Всі схеми підключені до джерел з однаковими ЕРС і внутрішніми опорами R. У якій схемі на зовнішньому колі виділяється найбільша теплова потужність?



Вказівки: Для знаходження потужності на зовнішньому колі як завжди користуємося законом Джоуля-Ленца та законом Ома для повного кола. Легко довести, що ця потужність буде мати максимальне значення за умови, коли опір зовнішнього кола буде дорівнювати внутрішньому опору джерела. Тому, якщо уважно придивитися, стає зрозумілим, що немає необхідності розраховувати значення опору у кожному випадку. А правильним варіантом відповіді буде мостова схема підключення резисторів, що наведена на рис. Г.

Відповідь Г.

14. У вашому розпорядженні є джерело сталої напруги 5 В та джерело змінної синусоїдальної напруги великої частоти 12 В. А також ідеальний вольтметр постійної напруги та ідеальний тепловий вольтметр змінної напруги. Джерела під'єднують послідовно один до одного і вимірюють напругу на кінцях (див. рис.). Знайти різницю показів вольтметрів .



Вказівки: Зрозуміло, що вольтметр постійної напруги не буде встигати реагувати на коливання змінної напруги великої частоти і його можна вважати його покази рівними $U_1=5\text{В}$. Вольтметр змінної напруги буде усереднює квадрат загальної напруги на джерелах і показувати її діюче значення:

$$U = U_2 = \sqrt{U_1^2 + (U_2\sqrt{2}\sin\omega t)^2} = \sqrt{U_1^2 + 2U_2^2\sin^2\omega t} = \sqrt{U_1^2 + U_2^2} = 13 \text{ В}$$

Таким чином різниця між показами вольтметрів буде складати $13-5=8 \text{ В}$.

Відповідь: 8 В.

15. Коливальний контур складається з конденсатора $C=0,005$ Ф, котушки індуктивності $L=0,2$ Гн та активного опору $R=2$ Ом. У деякий момент часу струм у контурі був максимальний і рівний 20 А. Знайти, яка кількість енергії виділиться у системі підчас повного затухання коливань після цього моменту.

Вказівки: Напишемо другий закон Кірхгофа для коливального контуру у той момент, коли струм був максимальним. $-L \frac{di}{dt} + \frac{q}{C} = iR.$

$\frac{q}{C} = IR. \Rightarrow q = ICR$ – заряд конденсатора в момент максимального значення струму.

Енергія контуру в цей момент: $W = \frac{LI^2}{2} + \frac{q^2}{2C} = \frac{I^2}{2}(CR^2 + L)$

Відповідь: 44 Дж.

16. При дуже низьких температурах деякі розріджені атомарні гази можуть перейти в особливий квантовий стан, так званий «п'ятий стан речовини». «Температура переходу» T , при якій можна отримати дану речовину, залежить лише від сталої Больцмана k , сталої Планка h , густини речовини ρ та маси атомів m , з яких складається дана речовина. Нагадаємо, що стала Планка - це коефіцієнт пропорційності між енергією фотона та його частотою: $W_f = h\nu$. Якщо ми зменшимо густину ρ цієї дивної речовини в 8 разів, то як зміниться «температура переходу» T ?

Вказівки: За методом розмірності можна отримати кельвін лише єдиною комбінацією густини, маси, постійної Планка та постійної Больцмана. В такій комбінації ступінь густини буде $2/3$: $T = \frac{h^2 \rho^{2/3}}{km^{5/3}}$. Звідси легко отримати правильну відповідь.

Відповідь: 0,25.

17. Об'єкт маси M прикріплений до пружини. Повертаюча сила пружини описується законом $F_x = -k \cdot X^3$, де X -зміщення тіла від положення рівноваги. Період таких коливань залежить від амплітуди коливань. Якщо початковий зсув тіла дорівнює A , то період коливань дорівнює T , яким буде період коливань, якщо початкове зміщення дорівнює $2A$?

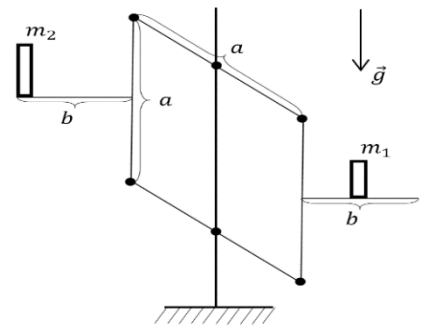
Вказівки: Для встановлення взаємозв'язку між періодом та амплітудою зручно скористатися методом масштабування. Так як сила пропорційна кубу зміщення, то повна енергія системи має вигляд:

$$W = kx^4 + MV^2$$

Якщо змінити масштаб відстані у α , а масштаб часу у β разів, то вираз енергії прийме свій звичний вигляд за умови, що $\alpha = 1/\beta$.

Відповідь: $T/2$.

18. Вантаж якої маси потрібно поставити на ліву планку в крайнє ліве положення щоб система знаходилась у рівновазі? Вантаж на правій планці (масою 6 кг) стоїть на відстані $b/2=0.5$ м. Довжина обох планок $b=1$ м, довжина сторони шарнірного ромбу $a=4$ м. Менший внутрішній кут ромбу на $\alpha = 30^\circ$. Розмірами вантажів знехтувати.



Вказівки: В задачі мова йде про так звані ваги Роберваля. Ця модель активно використовується для виробництва побутових механічних вагів. Вони є зручними тим, що абсолютно не важливо в яку точку шальок класти предмет, який ви хочете зважити. Правильна відповідь для даної задачі: на ліву шальку треба покласти предмет масою 6 кг, рівно стільки ж, скільки знаходиться і на правій. Те, що така система перебуватиме за даних умов у рівновазі можна довести за допомогою методу віртуальних переміщень, врахувавши, що з геометричних міркувань при зміщеннях системи зміна висоти для обох шальок є однаковою за модулем.

Відповідь: 6 кг.

19. Якщо відпустити дві заряджені частинки з однаковими масами та позитивними зарядами q_1 та q_2 , які початково знаходяться на відстані L одна від одної, то відстань між ними подвоїться через час t . Через який час подвоїться відстань між частинками, якщо початкова відстань між ними буде $4L$?

Вказівки: Цю задачу можна розв'язувати багатьма способами. Найпростіший – застосувати 3 закон Кеплера, який пов'язує характерні часи системи (не дивлячись на те, що ми маємо тут відштовхування, а не притягання, закони, які описують рух зарядів, є дуже за формою на закони руху небесних тіл) та характерні відстані: $\frac{T_1^2}{a_1^3} = \frac{T_2^2}{a_2^3}$. Іншим варіантом є метод масштабування. Третій варіант розв'язку полягає у тому, що ми знаємо, що всі характерні відстані зростають в чотири рази. Із закону збереження енергії просто отримати, що всі середні швидкості на подібних інтервалах зменшуються в 2 рази. В результаті, при діленні характерних відстаней на характерні швидкості отримуємо, що час зросте у 8 разів.

Відповідь: 8 с.