

Відкритий всеукраїнський фізичний марафон 10 клас

2 етап 14.03.2021

30 балів

1. На фото креативний стіл на ланцюгах. Він відрегульований так, що ланцюги однакової довжини натягнуті однаково. Знайдіть максимальну силу натягу ланцюга, якщо мінімальна дорівнює 50 Н, маса верхньої частини столу 12 кг, а маса довгого ланцюга 800 г (короткий удвічі коротший). Вважати, що прискорення вільного падіння 10 м/с^2 . **Відповідь надайте у Н. Розмірність не записуйте, тільки число 3 бали**



Розв'язання. Стіл висить на коротких ланцюгах, а довгі додатково тягнуть його вниз. Два коротких мають втримувати mg і чотири сили натягу довгих ланцюгів. Отже короткі натягнуті сильніше. Оскільки всі ланцюги масивні, чим вище вздовж них, тим більшою буде сила натягу. Тому максимальні сили натягу будуть біля верхніх місць кріплення коротких ланцюгів, а мінімальні – у найнижчих ділянках довших. Тоді на стіл разом з усіма ланцюгами діють вниз загальна сила тяжіння $(m_{\text{ст}} + m_{\text{лан}})g$ і $4T_{\text{min}}$, а вгору $2T_{\text{max}}$:

$$2T_{\text{max}} = 4T_{\text{min}} + (m_{\text{ст}} + m_{\text{лан}})g$$

Підставимо числові значення:

$$T_{\text{max}} = 2T_{\text{min}} + \frac{1}{2}(m_{\text{ст}} + m_{\text{лан}})g = 180 \text{ Н.}$$

2. Стрілець з лука випустив дві стріли з проміжком 4 с під кутом 60° до горизонту зі швидкістю 50 м/с. Знайдіть найменшу відстань між стрілами у повітрі. Опір повітря не враховувати.

3 бали

Розв'язання. Відстань між стрілами визначається відстанню по вертикалі та відстанню по горизонталі. Відстань по горизонталі постійна, поки обидві стріли знаходяться у повітрі і дорівнює $\Delta x = v_0 \cos \alpha \Delta t = 100$ м. Відстань по вертикалі після вильоту другої стріли буде зменшуватись і досягне мінімального значення 0, коли обидві стріли будуть знаходитися на одному рівні. В цей момент відстань між стрілами і буде найменшою, рівною **100 м**.

Цей розв'язок слід перевірити, оскільки можливо, що через 4 с перша стріла знизиться нижче точки пострілу. Тоді найменшою буде відстань у момент вильоту другої стріли. Перевірка показує, що через 4 с руху перша стріла буде вище точки пострілу, не зважаючи на те, яке значення прискорення вільного падіння взяти: $9,8 \text{ м/с}^2$ чи 10 м/с^2 .

3. Йон Тихий, герой циклу фантастичних оповідань Станіслава Лема розповідає про викинуту з космічного корабля банку консервів: «замість того, щоб полетіти далі, не хотіла залишати корабель і кружляла навколо нього, як штучний супутник, призводячи до регулярних (з інтервалом в 11 хвилин і 4 секунди) короткотривалих затемнень сонця». Для колової орбіти консервів розрахуйте, якою може бути найменша середня густина космічного корабля Йона Тихого. Вважайте, що корабель мав форму кулі, а гравітаційна стала $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{м}^2 / \text{кг}^2$.

3 бали

Розв'язання. Густина буде найменшою, коли траєкторія бляшанки дотикатиметься до корабля, оскільки зі збільшенням радіусу орбіти період збільшується (довжина кола збільшується, а швидкість зменшується). Це означає, що радіус орбіти бляшанки дорівнює радіусу корабля, тобто вона рухається з першою космічною швидкістю $v = \sqrt{GM/R}$.

Враховуючи $M = 4/3\pi R^3 \rho$ і $T = 2\pi R/v$, маємо

$$\rho = 3\pi/(GT^2) \approx \mathbf{320 \text{ г/см}^3}.$$

4. У кров людини ввели розчин солі NaCl, що містив 250 мільярдів атомів радіоактивного ізотопу натрію, період піврозпаду якого дорівнює 15 год. Через 30 год після цього активність проби крові об'ємом 1 мл становила 175 Бк. Знайдіть за цими даними об'єм крові в тілі людини (**в літрах**). Відповідь **округліть до десятих**. Виведенням солі з крові людини за цей проміжок часу знехтуйте.

3 бали

Розв'язання. Введемо позначення: $N_0 = 2,5 \cdot 10^{11}$, $T_{1/2} = 15$ год, $t = 30$ год, $A = 175$ Бк, $V_1 = 1$ мл.

Оскільки з моменту введення у кров розчину солі пройшов час $t = 2T_{1/2}$, то кількість ядер радіоактивного Na у крові зменшилась у 4 рази: $N = N_0/4$.

Тоді кількість ядер Na у пробі крові об'ємом V_1 знайдемо із співвідношення

$$N_1 = \frac{N}{V} \cdot V_1,$$

де V – шуканий об'єм крові у тілі людини.

Активність радіоактивного Na у пробі крові можна обчислити за формулою

$$A = \frac{0,69}{T_{1/2}} \cdot N_1.$$

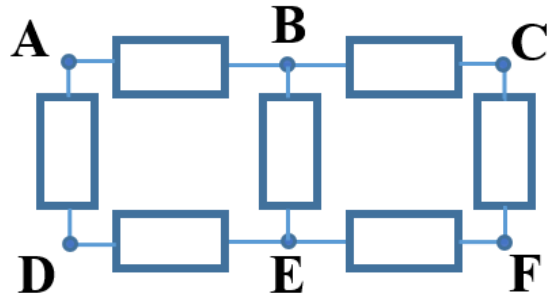
Остаточно маємо співвідношення $A = \frac{0,69}{T_{1/2}} \cdot \frac{N_0 V_1}{4V}$, з якого отримуємо робочу

формулу:

$$V = \frac{0,69 N_0 V_1}{4AT_{1/2}} = \frac{0,69 \cdot 2,5 \cdot 10^{11} \cdot 1 \cdot 10^{-3} \text{ л}}{4 \cdot 175 \text{ Бк} \cdot 15 \cdot 3600 \text{ с}} \approx 4,6 \text{ л}.$$

Відповідь: 4,6 л. Навіть якщо хтось у формулі активності замість наближеного значення 0,69, взяв точне $\ln 2$, відповідь у літрах з точністю до десятих залишиться незмінною.

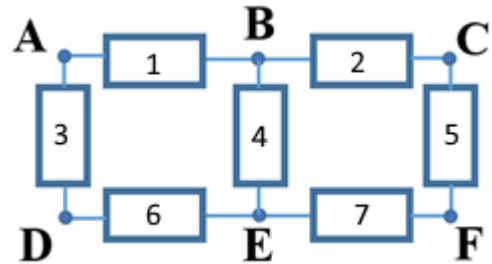
5. Є 6 точок, з'єднаних однаковими резисторами, як показано на схемі. Розгляньте усі можливі варіанти опорів електричного кола між указаними точками і знайдіть відношення максимального значення опору до мінімального значення.



3 бали

Розв'язання. В силу симетрії схеми принципово різних варіантів підключень між указаними точками буде тільки шість: AB , AC , AD , AE , AF , BE .

Обчислимо загальний опір електричного кола у кожному з цих випадків, позначивши опір кожного резистора R . Для зручності також пронумеруємо резистори.



1) При підключенні до точок A і B маємо:

$$R_{257} = 3R \text{ (послідовне з'єднання),}$$

$$R_{4257} = \frac{3R \cdot R}{3R + R} = \frac{3}{4}R \text{ (паралельне з'єднання),}$$

$$R_{364257} = \frac{3}{4}R + 2R = \frac{11}{4}R \text{ (послідовне з'єднання),}$$

$$R_{AB} = R_{1364257} = \frac{\frac{11}{4}R \cdot R}{\frac{11}{4}R + R} = \frac{11}{15}R \text{ (паралельне з'єднання).}$$

2) При підключенні до точок A і D значення опору вийде таким самим, як і у випадку AB :

$$R_{4257} = \frac{3R \cdot R}{3R + R} = \frac{3}{4}R, \quad R_{142576} = \frac{3}{4}R + 2R = \frac{11}{4}R, \quad R_{AD} = R_{3142576} = \frac{\frac{11}{4}R \cdot R}{\frac{11}{4}R + R} = \frac{11}{15}R.$$

3) При підключенні до точок A і C в силу симетрії схеми струм між точками B та E протікати не буде, тому резистор 4 на загальний опір не впливає, можна його «видалити». Після цього матимемо:

$$R_{12} = 2R, \quad R_{3675} = 4R, \quad R_{AC} = R_{123675} = \frac{2R \cdot 4R}{2R + 4R} = \frac{4}{3}R.$$

4) При підключенні до точок A і E матимемо:

$$R_{4257} = \frac{3R \cdot R}{3R + R} = \frac{3}{4}R,$$

$$R_{14257} = R + \frac{3}{4}R = \frac{7}{4}R,$$

$$R_{36} = 2R,$$

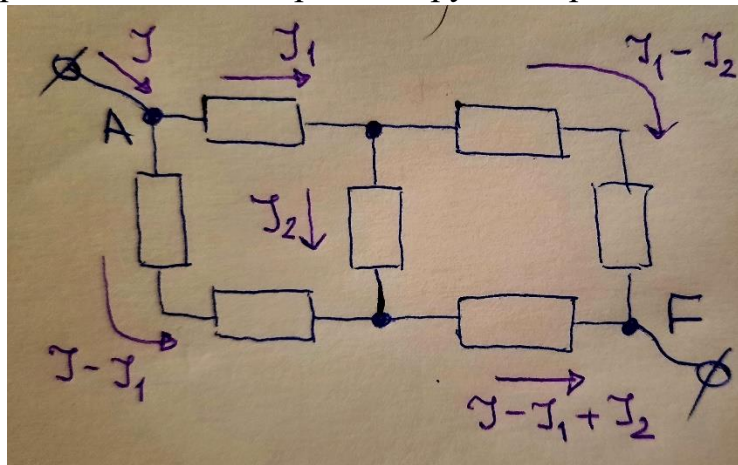
$$R_{AE} = R_{3614257} = \frac{\frac{7}{4}R \cdot 2R}{\frac{7}{4}R + 2R} = \frac{14}{15}R.$$

5) При підключенні до точок B і E матимемо:

$$R_{136} = R_{257} = 3R,$$

$$R_{BE} = R_{1364257} = \frac{3R \cdot 3R \cdot R}{3R \cdot 3R + 3R \cdot R + 3R \cdot R} = \frac{3}{5}R.$$

6) Для обчислення загального опору між точками A та F уявимо собі, що ми підключили електричне коло до джерела напруги U і розставимо на схемі струми.



Тепер, користуючись властивостями послідовного та паралельного з'єднань, можемо записати систему рівнянь:

$$\begin{cases} I_1 R + I_2 R = (I - I_1) \cdot 2R \\ (I_1 - I_2) \cdot 2R = I_2 R + (I - I_1 + I_2) \cdot R \\ I_1 R + (I_1 - I_2) \cdot 2R = U \end{cases}$$

звідки знайдемо:

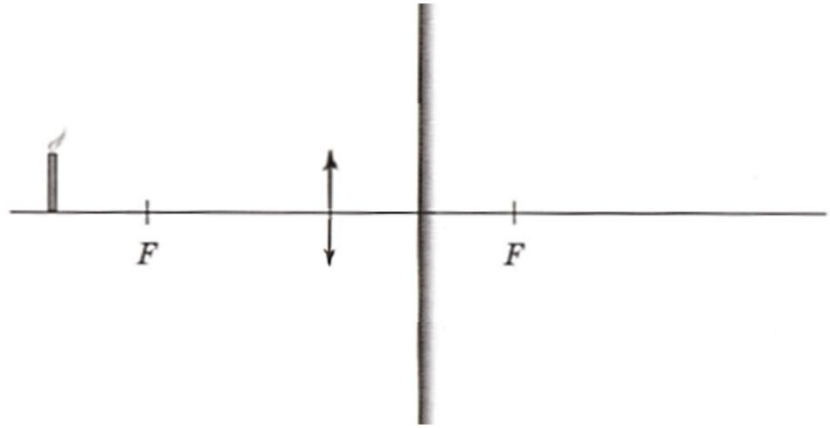
$$I_1 = \frac{3U}{7R}, \quad I_2 = \frac{U}{7R}, \quad I = \frac{5U}{7R}.$$

З останньої рівності робимо висновок, що $R_{AF} = \frac{U}{I} = \frac{7}{5}R$.

Отже, мінімальне значення опору дорівнює $\frac{3}{5}R$, а максимальне – $\frac{7}{5}R$; а їхнє

відношення дорівнює $7/3$.

6. Оптична система складається з невеликої збиральної лінзи з фокусною відстанню $F = 12$ см і великого плоского дзеркала, що розташоване паралельно лінзі на відстані 6 см від неї. Перед лінзою на відстані 18 см горить свічка. Знайдіть відстань між зображеннями свічки, які утворює ця оптична система.



3 бали

Розв'язання. Промені світла від свічки потрапляють на поверхню лінзи, заломлюються в ній, потрапляють на дзеркало, відбиваються в ньому і знову потрапляють в лінзу. Таким чином формується зображення свічки в оптичній системі «лінза-дзеркало». Для визначення положення зображення свічки в цій системі використовуємо правило, що в оптичній системі предметом для певного елемента системи є зображення, яке створює попередній елемент системи. Лінза дає перше зображення (використовуємо формулу тонкої лінзи) на відстані 36 см справа від оптичного центра лінзи (усі розіри підставляємо у см):

$$\frac{1}{18} + \frac{1}{f} = \frac{1}{12} \Rightarrow f = 36 \text{ см.}$$

Друге зображення вже формує дзеркало на відстані 30 см зліва від дзеркала (на дзеркало падає пучок променів від лінзи, що сходиться). Тобто для лінзи це «уявний» предмет на відстані -24 см від лінзи. Знов використовуємо формулу тонкої лінзи і отримуємо відстань від лінзи до кінцевого зображення свічки

$$\frac{1}{-24} + \frac{1}{f'} = \frac{1}{12} \Rightarrow f' = 8 \text{ см.}$$

Тобто зображення свічки в системі «лінза-дзеркало» буде дійсним і на відстані 8 см зліва від оптичного центра лінзи.

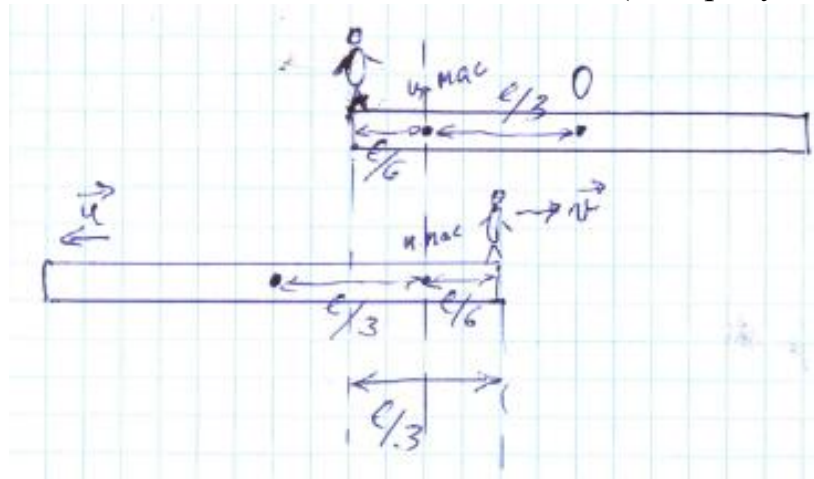
Оскільки промені світла від свічки потрапляють не тільки на поверхню лінзи, а й безпосередньо у дзеркало, то у дзеркалі формується уявне зображення свічки на відстані 30 см справа від оптичного центра лінзи. Таким чином відстань між дійсним зображенням свічки в системі «лінза-дзеркало» і уявним зображенням свічки в дзеркалі становить **38 см**.

7. Дошка лежить на гладенькому льоду. Людина починає бігти дошкою від одного до іншого її кінця. Якої максимальної горизонтальної швидкості відносно льоду може досягти людина? Маса людини 100 кг, маса дошки 50 кг, довжина дошки 6 м, коефіцієнт тертя між підшвами взуття людини і дошкою 0,4. Вважати, що прискорення вільного падіння 10 м/с^2 .

3 бали

Розв'язання. 1 спосіб

Оскільки на систему «людина-дошка» не діють горизонтальні сили (дошка лежить на гладенькому льоду), центр мас системи під час руху людини весь час залишається нерухомим. Маса людини у два рази більша за масу дошки, отже, спочатку людина перебувала на відстані $l/6$ від центра мас по один його бік, наприкінці руху — на відстані $l/6$ по другий бік від центра мас. Таким чином людина перемістилася відносно землі на відстань $l/3$ (див. рисунок).



Будемо вважати, що цю відстань людина подолає рухаючись рівноприскорено під дією максимальної сили тертя спокою $F = \mu Mg$. Таким чином прискорення людини становило $a = \mu g$. Для переміщення під час рівноприскореного руху маємо

$$s = \frac{v^2}{2a} \Rightarrow \frac{l}{3} = \frac{v^2}{2\mu g}$$

Звідси максимальна швидкість людини

$$v = \sqrt{\frac{2\mu gl}{3}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0,4 \cdot 10 \cdot 6}{3}} = 4 \left(\frac{\text{м}}{\text{с}} \right)$$

2 спосіб

На людину діє максимальна сила тертя спокою $F = \mu Mg$, яка на шляху $l/3$ виконує роботу $A = Fs = \mu g M \cdot \frac{l}{3}$. Ця робота йде на збільшення кінетичної енергії людини

$$\mu g M \cdot \frac{l}{3} = \frac{M v^2}{2}.$$

Звідси максимальна швидкість людини

$$v = \sqrt{\frac{2\mu g l}{3}} = 4 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Зауваження!

Якщо ми обчислимо роботу сили на всій довжині дошки $A = \mu g M l$, то слід врахувати, що ця робота йде на збільшення кінетичної енергії не тільки людини, а й дошки

$$\mu g M l = \frac{M v^2}{2} + \frac{m u^2}{2}. \quad (1)$$

З закону збереження імпульсу для мас і швидкостей людини та дошки маємо

$$M v = m u \Rightarrow \frac{m u^2}{2} = \frac{M v^2}{2m}. \quad (2)$$

Підставляємо (2) в (1) і отримуємо

$$\mu g M l = \frac{M v^2}{2} + \frac{M v^2}{2m} \Rightarrow \mu g l = \frac{v^2}{2} + \frac{M v^2}{2m} \Rightarrow \mu g l = \frac{3v^2}{2}.$$

Звідси максимальна швидкість людини

$$v = \sqrt{\frac{2\mu g l}{3}} = 4 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

8. 4 березня 2021 р. прототип міжпланетного багаторазового корабля Starship SN10 компанії SpaceX піднявся на висоту 10 км, потім, економлячи паливо, розвернувся у горизонтальне положення і з вимкненими двигунами спустився майже до поверхні Землі. На фото з інтервалом в 1 с показаний спуск корабля поблизу земної поверхні. За заявами Ілона Маска кораблі Starship призначені для колонізації Марса. Знайдіть швидкість аналогічного спуску такого ж корабля в марсіанській атмосфері поблизу поверхні. Прискорення вільного падіння на Марсі $3,7 \text{ м/с}^2$ (на Землі $9,8 \text{ м/с}^2$), густину марсіанської атмосфери можна вважати у 80 разів меншою за земну. Діаметр корпусу SN10 дорівнює 9 метрів. Виміри можна робити лінійкою або використати якийсь додаток. Можливу зміну режиму руху у зв'язку з переходом через звуковий бар'єр не враховуйте. Відповідь вкажіть у м/с з точністю до цілих. У відповіді розмірність не записуйте, тільки число.



Розв'язання. Під час рівномірного падіння сила опору повітря компенсує силу тяжіння. Сила опору має залежати від швидкості руху, ефективної площі поверхні і густини повітря. Правильну розмірність забезпечує єдина комбінація цих величин:

$$F_{\text{оп}} = C\rho S v^2,$$

де C – безрозмірна стала, яка визначається формою тіла (її подвоєне значення називається коефіцієнтом аеродинамічного опору). Таку ж формулу можна отримати, розглянувши силу як швидкість зміни імпульсу повітря (зручніше у

системі відліку тіла, що падає). Дорівнюючи силу опору $F_{\text{оп}}$ до mg , знаходимо вираз для швидкості:

$$v = \sqrt{\frac{mg}{C\rho S}}$$

Оскільки форма і маса кораблів за умовою однакові, відношення швидкостей на Марсі і на Землі матиме вигляд:

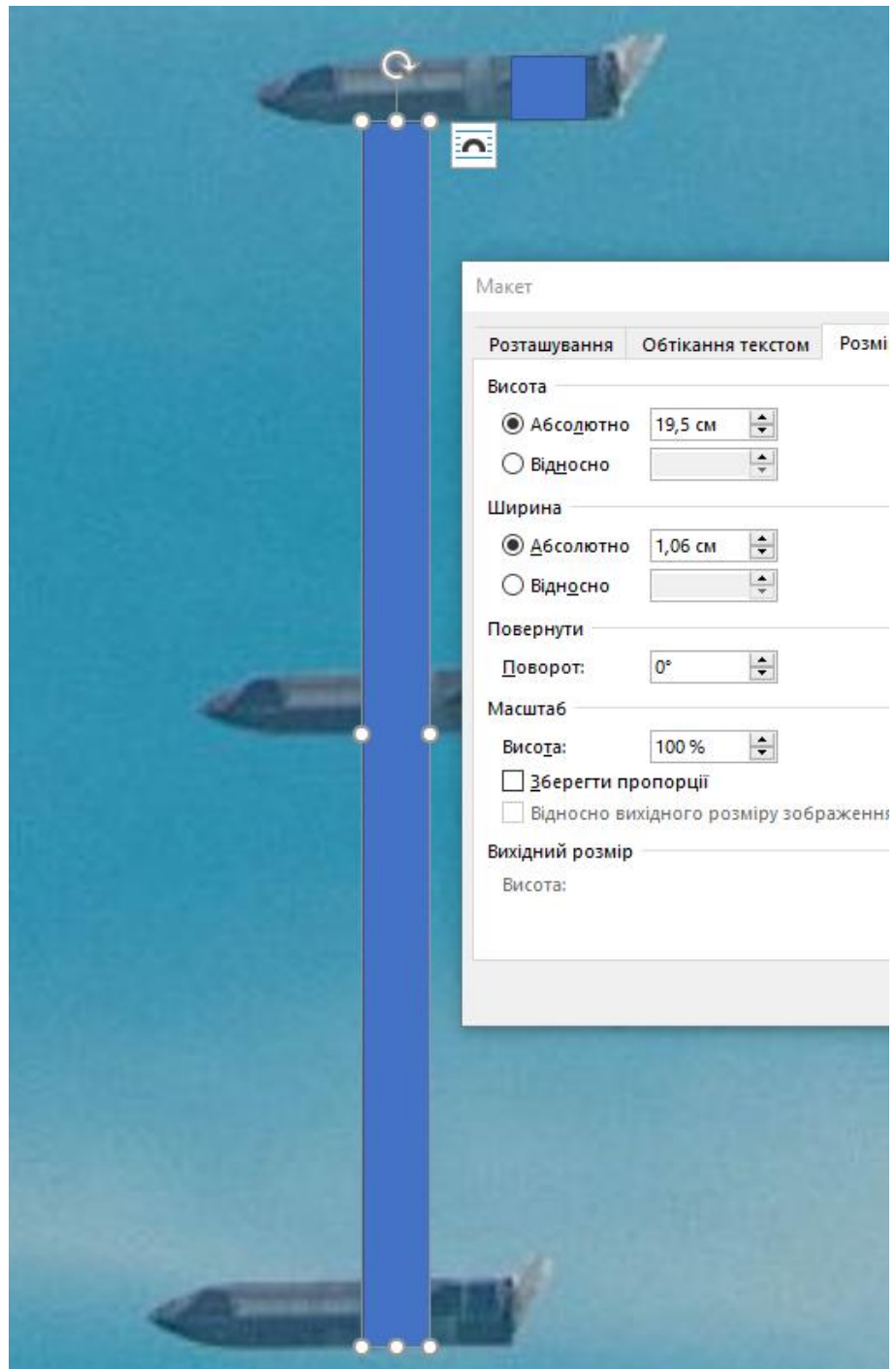
$$\frac{v_M}{v_Z} = \sqrt{\frac{g_M \rho_Z}{g_Z \rho_M}}$$

Швидкість спуску корабля у земній атмосфері знайдемо з зображення (див. скриншот нижче). Відстань, яку проходив корабель за 2 с у 19,5 разів перевищувала діаметр корабля (на скриншоті масштаб підібраний так, щоб діаметр SN10 дорівнював 1 см). Отже швидкість v_Z була приблизно 88 м/с. Підставляю числові дані і отримуємо:

$$v_M = v_Z \sqrt{\frac{g_M \rho_Z}{g_Z \rho_M}} \approx \mathbf{482 \text{ м/с.}}$$

Звісно, під час вимірів могли бути похибки, і тому правильною вважалася відповідь у межах ± 10 м/с від

зазначеною, а відповідь у межах ± 40 м/с оцінювалася у 2 бали. Що стосується іншої моделі, а саме лінійної залежності сили опору від швидкості (сила в'язкого тертя за невеликих розмірів тіл та швидкостей), ті, хто додатково припустив при цьому, що коефіцієнт динамічної в'язкості пропорційний густині повітря й виходив з формули $v_M = v_Z \frac{g_M \rho_Z}{g_Z \rho_M}$ та отримав відповідний вимірам результат, отримав 1 бал.



9. Диск старого електролічильника має діаметр 8 см. Під час споживання енергії він обертається. З якою швидкістю буде рухатись червона мітка на краю диску, якщо квартира споживатиме максимальну потужність, на яку розрахований лічильник? Увага: на електролічильнику виробник припустився помилки у розмірності енергії. Має бути: 1 кВт·год = 1250 обертів диску.



3 бали

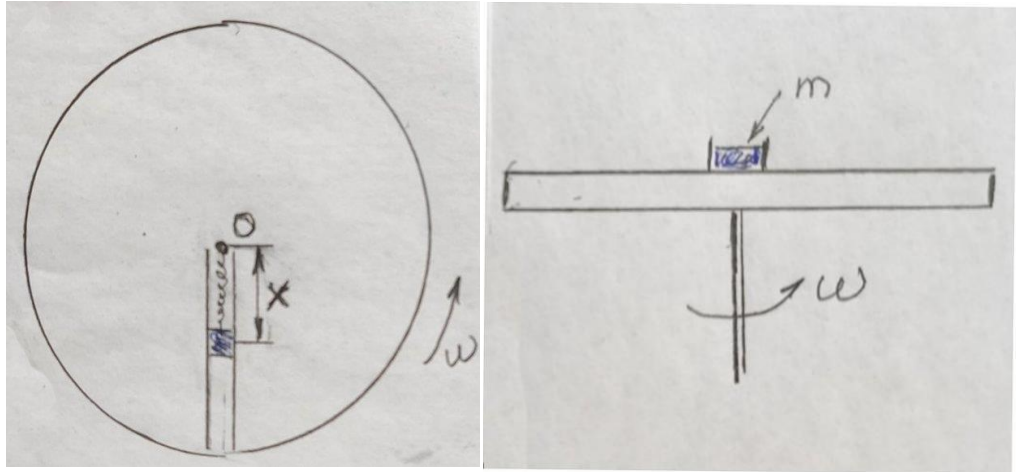
19,8 см/с	15 см/с	14,4 см/с	12,3 см/с	9,6 см/с
7,5 см/с	6,2 см/с	4,8 см/с	3,0 см/с	2,5 см/с

Розв'язання. Показники на лічильнику 220 В і 5 А дають максимальну потужність 1,1 кВт для усієї квартири (сьогодні це менше, ніж споживає один електрочайник). Отже, за годину (3600 с) диск зробить $1,1 \cdot 1250$ обертів. Звідси можемо знайти період або частоту. Швидкість $v = \frac{\pi d}{T} \approx 9,6$ см/с.

10. Горизонтально розташований диск обертається зі сталою кутовою швидкістю. Від центру O вздовж радіусу обертаються разом з диском дві паралельні гладенькі направляючі, між якими може рухатись шайба, з'єднана пружиною з центром диску. Маса шайби $m = 0,1$ кг, коефіцієнт тертя між шайбою і диском $\mu = 0,3$, коефіцієнт жорсткості пружини $k = 100$ Н/м, частота обертання диску $\nu = 5,0$ с⁻¹. Шайба знаходиться на відстані X від центру диску і відносно нього не рухається.

Знайти можливі значення X . У відповіді вказати **довжину інтервалу** можливих значень X у см, з **точністю до цілих**. **Розмірність не записуйте, тільки число**. Вважати, що прискорення вільного падіння 10 м/с².

3 бали



Розв'язання. На перший погляд здається, що в умові задачі не вистачає початкової довжини пружини l_0 . Ймовірно, якщо розв'язувати задачу у загальному вигляді, l_0 має скоротитися.

Розглянемо два крайні випадки: коли пружина максимально розтягнута і коли максимально стиснута.

У першому випадку сила тертя спрямована від центру, а сила пружності до центру. Отже

$$m\omega^2 X = k(X - l_0) - \mu mg,$$

звідки

$$X_{max} = \frac{kl_0 + \mu mg}{k - m\omega^2}.$$

У другому випадку

$$m\omega^2 X = k(X - l_0) + \mu mg,$$

звідки

$$X_{min} = \frac{kl_0 - \mu mg}{k - m\omega^2}.$$

Довжина інтервалу

$$\Delta X = X_{max} - X_{min} = \frac{2\mu mg}{k - 4\pi^2\nu^2 m} \approx \mathbf{46 \text{ см.}}$$

Задачі запропонували: 1,8,9 – Орлянський О.Ю., 2,3 – Триліс О.В., 4,5 – Даценко І.П., 6,7 – Ненашев І.Ю., 10 – Карасик В.Д.